Empfängersynchronisation

Skript zur Vorlesung im WS 2016/2017 Prof. Dr.-Ing. W. Koch wolfgang.koch@fau.de Lehrstuhl für Digitale Übertragung Universität Erlangen-Nürnberg Cauerstr. 7 91058 Erlangen

Inhalt:

1 Einführung (nur Folien)

- 1.1 Aufgaben der Synchronisation
- 1.2 Auswirkungen von Frequenzablagen und Abtastzeitfehlern
- 1.3 Entwurfsmethodik

2 Die Phasenregelschleife (PLL = Phase Locked Loop, nur Folien)

- 2.1 PLL Struktur und lineares Ersatzschaltbild
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

3 Maximum-Likelihood-Parameterschätzung

- 3.1 Einführung in die Schätztheorie
 - 3.1.1 Das allgemeine Schätzproblem
 - 3.1.2 Qualitätskriterien
 - 3.1.3 Optimalschätzung für stochastische Parameter
 - 3.1.4 Optimalschätzung für deterministische Parameter: Der ML-Ansatz
- 3.2 Die Cramer-Rao Schranken
 - 3.2.1 Schranke für Schätzfehler bei deterministischen Parametern
 - 3.2.2 Schätzung eines stochastischen Parameters
 - 3.2.3 Verallgemeinerung auf die gemeinsame Schätzung mehrerer Parameter
- 3.3 Anwendung der Schätztheorie auf die Parameterschätzung in digitalen Nachrichtenempfängern
 - 3.3.1 Berechnung der Cramer-Rao-Schranke
 - 3.3.2 ML-Schätzung aus einem endlichen Beobachtungsintervall
 - 3.3.3 Rekursive Parameterschätzung

4 Frequenzschätzung

- 4.1 Daten-gestützte Schätzung
 - 4.1.1 Maximum-Likelihood-Ansatz
 - 4.1.2 Praktikable Frequenzschätzer
- 4.2 Daten-unabhängige aber Takt-gestützte Schätzung
- 4.3 Daten- und Takt-unabhängige Schätzung

5 Phasenschätzung

- 5.1 Daten-gestützte Schätzung
 - 5.1.1 Maximum-Likelihood-Ansatz
 - 5.1.2 Analyse des Rauscheinflusses bei PSK
 - 5.1.3 Degradation auf Grund von Frequenzschätzfehlern
- 5.2 Entscheidungsgestützte Phasenschätzung: Der Costas-Regelkreis
- 5.3 Daten-unabhängige aber Takt-gestützte Schätzung
- 5.4 Daten- und Takt-unabhängige Schätzung

6 Taktsynchronisation

- 6.1 Maximum-Likelihood-Ansatz für Daten-gestützte Schätzung
- 6.2 Entscheidungsgestützte Schätzeung
 - 6.2.1 Maximum-Likelihood-Detektor (MLD)
 - 6.2.2 Early-Late-Detektor (ELD)
 - 6.2.3 Nulldurchgangsdetektor (ZCD)
 - 6.2.4 Müller&Müller-Detektor (M&M-Detektor)
 - 6.2.5 Leistungsvergleich entscheidungsgestützter Schätzung
- 6.3 Daten-unabhängige Schätzung

7 Signaldetektion

- 7.1 Optimalfilter zur Präambeldetektion
- 7.2 Einführung in die Detektionstheorie
- 7.3 Entscheidungsschwelle für den Optimaldetektor
- 7.4 Leistungsfähigkeit des Optimaldetektors im AWGN-Kanal
 - 7.4.1 Ideale Randbedingungen
 - 7.4.2 Einfluss nicht-idealer Präambel-AKF
 - 7.4.3 Einfluss nicht-optimaler Abtastzeitpunkte
 - 7.4.4 Einfluss von Nutzdaten nach der Präambel
- 7.5 Präambelerkennung bei unbekanntem Frequenzversatz

8 Kanalschätzung

- 8.1 Maximum-Likelihood-Ansatz
- 8.2 Korrelationsmethode
- 8.3 Vergleich ML-Ansatz / Korrelationsmethode bei GSM

9 Synchronisation bei Mehrträgermodulation (nur Folien)

- 9.1 Einführung in OFDM
- 9.2 Anforderungen an die Synchronisationsparameter
- 9.3 Daten-gestützte Kanalschätzung

10 Anwendungsbeispiele (nur Folien)

- 10.1 Anfangssynchronisation in GSM
- 10.2 WLAN nach IEEE 802.11a/b/g
- 10.3 DVB-T

Vertiefende Literatur:

- Umberto Mengali, Aldo N. D'Andrea: Synchronization Techniques for Digital Receivers Plenum Press, 1997, ISBN 0-306-45725-3
- Steven M. Kay: Fundamentals of Statistical Signal Processing Vol. 1: Estimation Theory Prentice Hall, 1993, ISBN: 0-13-504135-X
- Steven M. Kay: Fundamentals of Statistical Signal Processing Vol. 2: Detection Theory Prentice Hall, 1998, ISBN: 0-13-345711-7

Ergänzende Grundlagenwerke:

- Papoulis, S. U. Pillai: Probability, Random Variables and Stochastic Processes McGraw-Hill, 4th edition 2002, ISBN: 0-07-122661-3
- John G. Proakis: Digital Communications McGraw-Hill, 4th edition 2001, ISBN: 0-07-118183-0
- K.-D. Kammeyer: Nachrichtenübertragung Vieweg+Teubner, 5. Auflage 2011, ISBN: 978-3-8348-0896-7





Empfängersynchronisation 1 Einführung

Prof. Wolfgang Koch

Universität Erlangen-Nürnberg Lehrstuhl für Digitale Übertragung

1 Einführung

idc

1.1 Aufgaben der Empfängersynchronisation

- 1.2 Auswirkungen von Abtastzeitfehler
- 1.3 Auswirkungen von Frequenzablegen
- 1.4 Entwurfsmethodik

Digitales Basisband-Übertragungssystem



Digitales Trägerfrequenz-Übertragungssystem



Digitales Trägerfrequenz-Übertragungssystem in äquivalenter Basisbanddarstellung





Empfängersynchronisation ist immer ein Problem der Parameterschätzung

Wiederholung: Lineare Modulation

Das Sendesignal eines linearen Modulationsverfahrens ist gegeben durch

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]g(t-kT)$$

mit den Symbolen $a[k] \in \mathbb{C}$ und dem Modulationsimpuls g(t).

Lineare Modulation kann als zweistufiger Vorgang aufgefasst werden:



Bevorzugt werden solche Impulse eingesetzt, die das sog. Nyquist-Kriterium erfüllen: $\int_{0}^{\infty} e^{-k(x) - k} \left[E_{g} \quad \text{für} \quad k = 0 \right]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t+kT)g^*(t)dt = \begin{cases} D_g & \text{fur } k \neq 0\\ 0 & \text{fur } k \neq 0 \end{cases}$$

Die Nyquist-Bedingung sorgt für ISI-Freiheit der Entscheidungsvariablen in einem Optimalempfänger

Wiederholung: Optimalempfänger für linear modulierte Signale in AWGN

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] \delta(t-kT) \rightarrow \underbrace{\mathsf{Modulations-filter } g(t)}_{|h|e^{j\theta} \ w(t)} \mathbf{k}^{r(t)} \mathbf{k}^{r(t)$$

Es gilt: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] \rho_{gg}(t-kT)$ mit $\rho_{gg}(t)$ als zeitliche AKF des Modulationspulses

Optimaler Abtastzeitpunkt für das *k*-te Symbol: kT ($\hat{\tau} = 0$)

Optimale Entscheidungsregel:

1-7 W. Koch: Empfängersynchronisation

 $\hat{a}[\kappa] = \arg\left\{\min_{\forall \tilde{a}}\left\{\left|x[\kappa] - \tilde{a}\left|h\right|\sqrt{E_{g}/T}\right|^{2}\right\}\right\}$

Nyquist-Bedingung für Modulationsimpuls g(t) sorgt für ISI-Freiheit:

$$\rho_{gg}(\kappa T - kT) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - kT) g^*(t - \kappa T) dt = \begin{cases} E_g & \text{für } k = \kappa \\ 0 & \text{für } k \neq \kappa \end{cases}$$



Wiederholung: Quadratur-Amplitudenmodulation (QAM)

idc

idc

Symbole liegen auf Rechteckgitter: a[k] = (2i+1) + j(2n+1) *i* und *n* ganzzahlig



1-9 W. Koch: Empfängersynchronisation

Fourier-Transformierte von $\sqrt{\cos}$ -Impulsen



idc

 $\sqrt{\cos}$ -Impulse bilden eine wichtige Klasse von Nyquist-Impulsen. Sie werden über ihre Fourier-Transformierte definiert:









1-13 W. Koch: Empfängersynchronisation



1.1 Aufgaben der Empfängersynchronisation

1.2 Auswirkungen von Abtastzeitfehlern

- 1.3 Auswirkungen von Frequenzablager
- 1.4 Entwurfsmethodik









vcos-Impulse: Optimale Abtastung



idc

 $\sqrt{\cos}$ Impuls mit $\alpha = 0.1$: Augendiagramm eines PSK-Signals nach dem matched Filter





√cos-Impulse: Auswirkungen von Fehlern des Abtastzeitpunktes

idc

Nutzleistung und ISI-Leistung sind analytisch berechenbar (s. Anhang A):

AKF:
$$\rho(\tau) = \frac{\cos(\pi \alpha \tau)}{1 - (2\alpha \tau)^2} \cdot \frac{\sin(\pi \tau)}{\pi \tau}$$

Nutzleistung:
$$P_{\rm s} = {\rm E}\left[\left|A[k]\rho(\varepsilon_{\tau})\right|^2\right] = \left|\rho(\varepsilon_{\tau})\right|^2 = \left(\frac{\cos(\pi\alpha\varepsilon_{\tau})}{1-(2\alpha\varepsilon_{\tau})^2} \cdot \frac{\sin(\pi\varepsilon_{\tau})}{\pi\varepsilon_{\tau}}\right)$$

Gesamtleistung:
$$P_{\text{tot}} = \mathbf{E}\left[\left|\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} A[\kappa]\rho(\varepsilon_{\tau}-\kappa T)\right|^{2}\right] = 1 - \frac{\alpha}{2}\sin^{2}\pi\varepsilon_{\tau}$$

ISI-Leistung: $P_{\rm ISI} = P_{\rm tot} - P_{\rm S}$

 $\sqrt{\cos}$ -Impulse: Auswirkungen von Fehlern des Abtastzeitpunktes auf Nutz- und ISI-Leistung in der Entscheidungsvariablen





 $\sqrt{\cos}$ -Impulse: Auswirkungen von Fehlern des Abtastzeitpunktes auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei perfekter Phasenkenntnis





1-23 W. Koch: Empfängersynchronisation



 $\frac{(\mathbf{u})}{\mathbf{d}c}$

- 1.1 Aufgaben der Empfängersynchronisation
- 1.2 Auswirkungen von Abtastzeitfehlerr

1.3 Auswirkungen von Frequenzablagen

1.4 Entwurfsmethodik





 $\sqrt{\cos}$ -Impulse: Auswirkungen von Frequenzablagen auf Nutz- und ISI-Leistung in der Entscheidungsvariablen **id**C



 $\sqrt{\cos}$ -Impulse: Auswirkungen einer Frequenzablage auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit bei perfekter Phasenkenntnis



idc

1 Einführung



- 1.1 Aufgaben der Empfängersynchronisation
- 1.2 Auswirkungen von Abtastzeitfehler
- 1.3 Auswirkungen von Frequenzablager

1.4 Entwurfsmethodik

Entwurfsmethodik

1-27 W. Koch: Empfängersynchronisation



- Ad hoc Entwurf
 - Entwurf einer Struktur auf Grund von Erfahrungen und Sachverstand
 - Typischer Weise bestehend aus einer gedächtnislosen Nichtlinearität zur Erzeugung eines periodischen Signalanteils und einem schmalbandigen Filter zur Gewinnung eines Signals mit der Periode 1/T.
- Systematisch abgeleiteter Entwurf
 - Ausgehend von einem gewünschten Gütekriterium wird ein theoretischer Ansatz aufgestellt, aus dem die optimale Struktur hergeleitet werden kann.
 - Struktur häufig zu komplex, aber gute Basis für sub-optimale Verfahren
 - Liefert theoretische Güte-Schranken (Cramer-Rao-Schranke)

Beispiel für einen ad hoc Ansatz zur Taktrückgewinnung

idc

 Problem: häufig kein spektraler Leistungsanteil an der gewünschten Frequenz Beispiel: iid PAM-Basisbandsignal mit Nyquist-Impulsen:



 Lösung: Anwendung einer Nichtlinearität (z.B. Quadrierung des Signals)

Beispiel für einen ad hoc Ansatz zur Taktrückgewinnung



1-29 W. Koch: Empfängersynchronisation

Zusammenfassung Synchronisationsaufgaben

- Trägersynchronisation
 - Schätzung der Trägerfrequenz
 - Schätzung der Trägerphase bzw. Kanalimpulsantwort
- Symbolsynchronisation
 - Ermittlung der Symbolrate 1/T (exakt)
 - Schätzung der optimalen Abtastphase
- Blocksynchronisation
 - Signaldetektion
 - Ermittlung des Beginns eines Datenblockes

Man unterscheidet:

- <u>Anfangssynchronisation (initial synchronisation, acquisition):</u> Erstmaliges Herstellen der Synchronisation
- <u>Nachführung (tracking):</u> Verfolgen der Synchronisationsparameter bei Veränderungen, z.B. durch den Kanal

1-31 W. Koch: Empfängersynchronisation



(1)







Empfängersynchronisation 2 Die Phasenregelschleife

Wolfgang Koch

idc

Universität Erlangen-Nürnberg Lehrstuhl für Digitale Übertragung

2. Die Phasenregelschleife (Phase Locked Loop)

- 2.1 PLL-Grundlagen
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

2.1 PLL-Grundlagen

Eine Phasenregelschleife (engl.: Phase Locked Loop = PLL) ist eine rückgekoppelte Schaltungsanordnung zur Erzeugung eines periodischen Signals, dessen Phase der Phase eines (meist gestörten) Referenzsignals folgt.

Bezeichnungen:

2-3 W. Koch: Empfängersynchronisation

PLL Eingangssignal: $s_{1HF}(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1(t)) + w_{HF}(t)$

PLL Ausgangssignal: $s_{2HF}(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2(t))$

 $w_{\rm HE}(t)$ bezeichnet weißes Gausches Rauschen

 ω_0 bezeichnet eine Trägerfrequenz

Anm.: Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann ω_0 eine beliebige Frequenz sein: Sei ω_1 die tatsächliche Trägerfrequenz des Empfangssignals und $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_0$ die Differenzfrequenz zu ω_0 , dann ist $\Delta \omega$ t additiver Bestandteil der Phase $\varphi_1(t)$.

Beispiel für einen Phasendetektor

$$s_{1\rm HF}(t)$$

 $s_{2\rm HF}(t)$
Tiefpass $V(t)$

$$s_{1\rm HF}(t) \cdot s_{2\rm HF}(t) = A_1 A_2 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_1(t)\right) \cos\left(\omega_0 t + \varphi_2(t)\right)$$

Additions theorem aus der Trigonometrie: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta))$

$$s_{1\rm HF}(t) \cdot s_{2\rm HF}(t) = \frac{A_1 A_2}{2} \left(\sin\left(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right) + \sin\left(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right) \right)$$

 $\sin(\varphi_1(t)-\varphi_2(t))$ ist typischer Weise ein Tiefpasssignal mit einer oberen Grenzfrequenz, die wesentlich kleiner als die Trägerfrequenz ω_0 ist, so dass der hochfrequente Anteil in dem Produkt mittels einfacher Tiefpassfilterung eliminiert werden kann. Nach Tiefpassfilterung erhält man

$$\mathbf{v}(t) = \frac{A_1 A_2}{2} \sin\left(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right)$$



Blockschaltung einer PLL



Aufgaben einer PLL

- Die PLL ist ein wesentlicher Grundbaustein zur Synchronisation in Trägerfrequenzsystemen
- Typische Probleme in Nachrichtenempfängern:
 - Synchronisationsparameter (Frequenz, Phase, Takt) sind stark gestört
 - Oszillatoren unterliegen Fertigungsstreuungen, Temperaturschwankungen, Alterungen, usw.
 - Folge: geschätzte Synchronisationsparameter weichen vom Sollwert ab und können sich zeitlich ändern (sowohl im Sender wie im Empfänger)
- PLL-Lösungsansatz:
 - Kopplung des Oszillatorsignals im Empfänger an Frequenz und Phase der Trägerfrequenz bzw. der Symbolfolge des Empfangssignals
- Wirkung wie extrem schmalbandiger Bandpass
- Warum PLL statt Bandpass?
 - (fast) beliebig kleine Bandbreiten realisierbar ⇒ hohe Störunterdrückung
 - liefert Signal auch bei Ausfall des Empfangssignals
 - Mittenfrequenz ist einfach durchzustimmen
- Anwendungen:
 - Frequenzsynchronisation
 - Taktsynchronisation
 - Frequenzsynthese

Nachführeigenschaft und Filterfunktion der PLL



 $\binom{(n)}{d}$

in HF-Darstellung:



in äquivalenter Basisbandsignaldarstellung:



Lineares Ersatzschaltbild einer PLL

Linearisierung: $K_{D} = \frac{df_{\rm NL}(\Delta\varphi)}{d\Delta\varphi} \Big _{\Delta\varphi=0}$	$ \begin{array}{c} \Delta \varphi(t) \\ K_D \\ \hline G_0(s) \end{array} $			
Übertragungsfunktionen des linearisierten PLL:				
offene Regelschleife:	$G_0(s) = \frac{\Phi_2(s)}{\Delta \Phi(s)} = K_0 K_D \frac{F(s)}{s} \text{mit } \Phi_2(s) = \int_0^\infty \varphi_2(t) e^{-st} dt$			
geschlossene Regelschleife:	$\Phi_2(s)$			
Führungsfrequenzgang:	$H(s) = \frac{\Phi_{2}(s)}{\Phi_{1}(s)} = \frac{\Phi_{2}(s)}{\Phi_{2}(s) + \Delta\Phi(s)} = \frac{\Delta\Phi(s)}{1 + \frac{\Phi_{2}(s)}{1 + G_{0}(s)}} = \frac{G_{0}(s)}{1 + G_{0}(s)}$			
Fehlerfrequenzgang:	$ \frac{H(s) = \frac{K_0 K_D F(s)}{s + K_0 K_D F(s)}}{E(s) = \frac{\Delta \Phi(s)}{\Phi_1(s)} = \frac{\Phi_1(s) - \Phi_2(s)}{\Phi_1(s)} = 1 - H(s) = \frac{s}{s + K_0 K_0 F(s)} $			

idc

idc

Bezeichnungen:

2-9 W. Koch: Empfängersynchronisation

- PLL erster Ordnung:
- PLL zweiter Ordnung:
- F(s) enthält keine Polstelle F(s) enthält eine Polstelle

- ...
- PLL *n*-ter Ordnung: F(s) enthält *n*-1 Polstellen

Anmerkung: Die Ordnung sagt noch nichts darüber aus, wo die Pole liegen. Insbesondere müssen sie nicht bei s = 0 liegen.

2. Die Phasenregelschleife (PLL)

- 2.1 PLL-Grundlagen
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

idc

t

2.2 Stationäres Verhalten der PLL: $\Delta \varphi(t)$ für $t \rightarrow \infty$

Eigenschaft der Laplace-Transformation:
$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

mit $F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ als Laplace-Transformierte von $f(t)$
$$\lim_{t \to \infty} \Delta \varphi(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot \Delta \Phi(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) \cdot \Phi_1(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{s^2}{s + K_0 K_D F(s)} \cdot \Phi_1(s)$$

1. Phasensprung:

2-11 W. Koch: Empfängersynchronisation

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi_1(s) = \frac{\varphi_0}{s}$$

 $\lim_{t \to \infty} \Delta \varphi(t) = \lim_{s \to 0} \frac{s \cdot \varphi_0}{s + K_0 K_D F(s)} = 0 \text{ nur für } |F(s=0)| > 0$

Phasensprünge werden ausgeregelt, wenn F(s) keine Nullstelle bei s = 0 besitzt

 $\varphi_0 = \varphi_1(t)$



2. Die Phasenregelschleife (PLL)

- 2.1 PLL-Grundlagen
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

Nachführverhalten einer linearen PLL 2. Ordnung

Schleifenfilter:

$$F(s) = \frac{1+sT_1}{sT_2}$$
PLL-Übertragungsfunktion:

$$H(s) = K_0 K_D \frac{F(s)}{s+K_0 K_D F(s)}$$

$$= K_0 K_D \frac{1+sT_1}{s^2 T_2 + K_0 K_D (1+sT_1)}$$

$$= \frac{K_0 K_D}{T_2} \frac{1+sT_1}{s^2 + K_0 K_D \frac{T_1}{T_2} s + \frac{K_0 K_D}{T_2}}$$
übliche Darstellung des Nennerpolynoms:

$$s^2 + 2D\omega_E s + \omega_E^2$$
mit D = Dämpfungsfaktor und $\omega_E = 2\pi f_E$ = Eigenfrequenz
Koeffizientenvergleich liefert:

$$\omega_E = \sqrt{\frac{K_0 K_D}{T_2}} D = \frac{T_1}{2} \sqrt{\frac{K_0 K_D}{T_2}} = \frac{T_1}{2} \omega_E$$

$$\frac{H(s) = \frac{1+2D \cdot s/\omega_E}{(s/\omega_E)^2 + 2D \cdot s/\omega_E + 1}}$$

idc

idc

Beispiele für Schleifenfilter

Übertragungsfunktion Schaltung $|F(j\omega)|$ 1. filterlos F(s) = 1*u*₂ u_1 ω $|F(j\omega)|_{\log}$ $F\left(s\right) = \frac{1 + sT_1}{1 + sT_2}$ 1 pass. PI-Regler R_2 R_1 u_1 u_2 $T_1 = R_1 C$ $T_2 = (R_1 + R_2)C$ T_{1}/T_{1} ω_{\log} $1/T_2$ $1/T_1$ $|F(j\omega)|_{\log}$ $F(s) = \frac{1 + sT_1}{sT_2}$ R R $C R_1$ akt. PI-Regler $T_1 = R_1 C$ $T_2 = R_2 C$ u_1 T_1/T_2 *u*₂ -u₁ $1/T_{1}$ $\omega_{\rm log}$

Übertragungsfrequenzgang einer PLL 2. Ordnung; Parameter: D = 0.3, 0.5, 0.707, 1, 2 idc



Berechnung der Impulsantwort

 $h(\tau)$ = inverse Laplace-Transformierte von H(s)Berechnung mit Hilfe von Transformations-Tabellen

Zur Anwendung kommen hier die folgenden Korrespondenzen

F(s) =	$\frac{\beta}{\left(s+\alpha\right)^2+\beta^2}$	$\frac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\beta^2}$	$\frac{\beta}{\left(s+\alpha\right)^2-\beta^2}$	$\frac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2-\beta^2}$
f(t) =	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$e^{-\alpha t}\sinheta t$	$e^{-\alpha t}\cosh\beta t$

- 1. Umformung von H(s) für 3 Fälle: D < 1, D = 1, D > 1
- 2. Korrespondenzen der Tabelle entnehmen

2-19 W. Koch: Empfängersynchronisation

V. Koch: Empfängersynchronisation

3. Ausdrücke zur kompakten Darstellung zusammenfassen

Zeitfunktionen eir		
— Bezeichnungen:	$\beta = \sqrt{ 1 - D^2 }$ und $c = \frac{2D^2 - 1}{2\sqrt{ 1 - D^2 }}$	IUC
Impulsantwort:	$h_{\rm imp}(t) = \begin{cases} \omega_E e^{-D\omega_E t} \left(2D\cos\beta\omega_E t - 2c\sin\beta\omega_E t \right) & \text{für} \\ \omega_E e^{-\omega_E t} \left(2 - \omega_E t \right) & \text{für} \\ \omega_E e^{-D\omega_E t} \left((c+D)e^{-\beta\omega_E t} - (c-D)e^{\beta\omega_E t} \right) & \text{für} \end{cases}$	D < 1 $D = 1$ $D > 1$
Sprungantwort:	$h_{\text{step}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-D\omega_{E}t} \left(\cos \beta \omega_{E}t - \frac{D}{\beta} \sin \beta \omega_{E}t \right) & \text{für} \\ 1 - e^{-\omega_{E}t} \left(1 - \omega_{E}t \right) & \text{für} \\ 1 - e^{-D\omega_{E}t} \left(\frac{c+D}{D+\beta} e^{-\beta\omega_{E}t} - \frac{c-D}{D-\beta} e^{\beta\omega_{E}t} \right) & \text{für} \end{cases}$	D < 1 $D = 1$ $D > 1$
Rampenantwort:	$h_{\text{ramp}}(t) = \begin{cases} t \left(1 - e^{-D\omega_{E}t} \frac{\sin \beta \omega_{E}t}{\beta \omega_{E}t} \right) \\ t \left(1 - e^{-\omega_{E}t} \right) \\ t - \frac{1}{\omega_{E}} e^{-D\omega_{E}t} \left(\frac{c+D}{\left(D+\beta\right)^{2}} e^{-\beta \omega_{E}t} - \frac{c-D}{\left(D-\beta\right)^{2}} e^{\beta \omega_{E}t} \right) \end{cases}$	$ \begin{aligned} & \text{für} D < 1 \\ & \text{für} D = 1 \\ \\ & \text{für} D > 1 \end{aligned} $

Sprungantwort einer PLL 2. Ordnung; Parameter D = 0.3, 0.5, 0.707, 1, 2 idc



Asymptotisches Verhalten der Sprungantwort einer PLL (1)2. Ordnung in log. Darstellung; Parameter D = 0.3, 1, 2



Phasenfehler einer PLL 2. Ordnung als Reaktion auf einen Frequenzsprung; Parameter D = 0.3, 0.5, 0.707, 1, 2.



idc

idc

2. Die Phasenregelschleife (PLL)

- 2.1 PLL-Grundlagen
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

Rauschverhalten der PLL

$$s_{1\rm HF}(t) \xrightarrow{r_{\rm HF}(t)} PD \xrightarrow{V(t)} V(t)$$

$$w_{\rm HF}(t) \xrightarrow{s_{2\rm HF}(t)} V(t)$$

$$s_{1\text{HF}}(t) = a_1 \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$s_1(t) = a_1 e^{j\varphi_1}$$

id⁽⁾

 $w_{\rm HF}(t)$ = bandbegrenztes weißes Gauß'sches Rauschen mit der **einseitigen** Rauschleistungsdichte N_0 und Bandbreite *B* Signal zu Rauschleistungsverhältnis am Eingang des Phasendetektors:

$$SNR = \frac{a_1^2}{B \cdot N_0}$$

Einfluss des Rauschens auf das Phasendifferenzsignal:

$$r(t) = a_1 e^{j\varphi_1} + w(t)$$

Gaussprozesse können mit einem beliebigen Rotationsfaktor (z.B. auch mit $e^{j\varphi_1}$) multipliziert werden, ohne dass sich die statistischen Eigenschaften ändern (Rotationsinvarianz).

Varianz des Phasenrauschens am Eingang der PLL

$$\begin{split} \text{PLL-Eingangssignal:} & r(t) = a_1 e^{j\varphi_1} + w(t) e^{j\varphi_1} \\ &= (a_1 + w(t)) e^{j\varphi_1} \\ &= (a_1 + w_I(t) + jw_Q(t)) e^{j\varphi_1} \\ \text{Phase des PLL-Eingangssignals:} & \varphi_r(t) = \varphi_1 + \arctan\left(\frac{w_Q(t)}{a_1 + w_I(t)}\right) \\ \text{Näherung für SNR >> 1:} & \varphi_r(t) \approx \varphi_1 + \frac{w_Q(t)}{a_1} \\ \text{Rauschvarianz:} & \sigma_{\varphi_r}^{-2} \approx \frac{\text{E}\left[w_Q^2(t)\right]}{a_1^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{E}\left[|w(t)|^2\right]}{a_1^2} = \frac{1}{2} \frac{B \cdot N_0}{a_1^2} \\ \hline \sigma_{\varphi_r}^{-2} \approx \frac{1}{2SNR} & \text{für } SNR >> 1 \end{split}$$

Anmerkung: Bei Phasensignalen macht es keinen Sinn, ein Signal-zu Rauschleistungs<u>verhältnis</u> anzugeben, da die Größe der Nutz-Phase kein Maß für die Signalqualität darstellt.

2-25 W. Koch: Empfängersynchronisation

Auswirkung des Rauschens auf $\varphi_2(t)$





Anschauliche Interpretation der äquivalenten Rauschbandbreite

idc

 $H(j2\pi f)$ sei die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems.



Äquivalente Rauschbandbreiten für verschiedene Filter

Filter- Übertragungsfunktion <i>F</i> (<i>s</i>)	PLL- Übertragungsfunktion <i>H</i> (s)	äquivalente Rauschbandbreite B _{Noise}
1	$\frac{K_0 K_D}{s + K_0 K_D}$	$\frac{K_0 K_D}{2}$
$\frac{1+sT_1}{sT_2}$	$\frac{1+2D\cdot s/\omega_{E}}{\left(s/\omega_{E}\right)^{2}+2D\cdot s/\omega_{E}+1}$	$\omega_E D\left(1+\frac{1}{4D^2}\right)$
$\frac{1+sT_1}{1+sT_2}$	$\frac{1 + (2D - \beta) \cdot s / \omega_E}{(s / \omega_E)^2 + 2D \cdot s / \omega_E + 1}$	$\omega_E D \left(1 - \frac{\beta}{D} + \frac{1 + \beta^2}{4D^2} \right)$
$\omega_{E} = \sqrt{2}$	$\frac{\overline{K_0 K_D}}{T_2} \qquad D = \frac{T_1}{2} \sqrt{\frac{K_0 K_D}{T_2}}$	$\beta = \sqrt{\left 1 - D^2\right }$

idc

idc

2. Die Phasenregelschleife (PLL)

- 2.1 PLL-Grundlagen
- 2.2 Stationäres Verhalten
- 2.3 Nachführverhalten
- 2.4 Rauschverhalten
- 2.5 Phasendetektoren: Realisierungsaspekte

2-29 W. Koch: Empfängersynchronisation

Phasendetektoren (1)



Phasendetektoren bestehen aus

- einem Signalkomparator und
- einem Tiefpass zur Oberwellenbefreiung (Grenzfrequenz deutlich größer als beim Schleifenfilter, daher kein Einfluss auf das dynamische PLL-Verhalten)
- 1. Multiplizierer-PD:



2. Multiplizierer-PD mit Begrenzer:

$$s_{1HF}(t) \longrightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{V(t)} s_{1HF}(t) = \sin(\omega_1 t + \varphi_1(t))$$

$$s_{2HF}(t) \rightarrow \mathbb{T} \xrightarrow{V(t)} s_{2HF}(t) = 2 \operatorname{sign}(\cos(\omega_1 t + \varphi_2(t))) - \frac{\pi}{2}$$

$$V(t) = \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$$

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2$$

Vorteil: einfache Realisierung des Multiplizierers

2-31 W. Koch: Empfängersynchronisation



Phasendetektoren (3)

5. Phasen- und Frequenzdetektor mit 4π linearem Bereich Vorteil: keine separaten Frequenz-Fangschaltungen erforderlich


3 Maximum Likelihood Parameterschätzung

3.1 Einführung in die Schätztheorie

3.1.1 Das allgemeine Schätzproblem

Zur Synchronisation ist es erforderlich, aus einem gestörten Empfangssignal die Trägerfrequenz, die Trägerphase sowie den Symboltakt und die Abtastphase zu schätzen. Die theoretische Grundlage zur Lösung dieser Aufgabe liefert die Schätztheorie. Die Beschäftigung mit der Schätztheorie ist aus folgenden Gründen lohnenswert:

- Mit ihrer Hilfe können Synchronisationsverfahren hergeleitet werden, die im Sinne eines noch zu definierenden Qualitätsmaßes optimal sind.
- Sie erlaubt die Angabe von theoretischen Grenzen, mit denen die Qualität von Synchronisationsverfahren beurteilt werden kann.

In der Schätztheorie wird allgemein das Problem betrachtet, aus einer Anzahl beobachtbarer Größen ein oder mehrere Parameter zu schätzen. Häufig sind die zu schätzenden Parameter nur indirekt in den beobachtbaren Größen enthalten. Zudem sind die beobachtbaren Größen im Allgemeinen gestört. Wenn z.B. die Frequenz einer unmodulierten Sinusschwingung zu schätzen ist, von dem Sinussignal aber nur einige Abtastwerte vorliegen, so liegt der Parameter "Frequenz" nur indirekt vor und muss durch nichtlineare Abbildung aus den Abtastwerten gewonnen werden. Die Abtastwerte selbst können zusätzlich noch gestört sein, z.B. durch additives Gauß'sches Rauschen.

Die Schätzaufgabe kann als eine übertragungstechnische Aufgabe nach Abb. 3-1 aufgefasst werden. Die zu übertragenden Werte sind Parameter, die wir hier mit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_L$ bezeichnen wollen und kompakt als Parametervektor $\underline{\lambda}$ bezeichnen. Für unser Synchronisationsproblem sind diese Parameter die Trägerfrequenz, die Trägerphase, der Symboltakt und die Abtastphase. Der Übertragungskanal bildet die Parameter auf eine Folge von beobachtbaren Größen $r_1, r_2, ..., r_K$ ab, welche als Abtastwerte eines endlichen Beobachtungsintervalls eines Signals r(t) aufgefasst werden können. Der Kanal ist durch seine Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r}|\underline{\lambda})$ vollständig beschrieben. Dabei handelt es sich genau genommen um bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (WDFen). Sie werden auch *Likelihoodfunktionen* genannt. Aus dem Beobachtungsvektor \underline{r} werden nun Schätzwerte $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, ..., \hat{\lambda}_L$ ermittelt. Ziel ist es, einen Algorithmus zu finden, der im Sinne eines vorzugebenden Fehlerkriteriums optimale Schätzwerte liefert.



Abb. 3-1: Das allgemeine Schätzproblem

Hinweise zur Notation:

- Große Buchstaben bezeichnen Zufallsvariable, kleine Buchstaben bezeichnen spezielle Werte, die eine Zufallsvariable annehmen kann. Z.B. ist *r_i* ein Wert, den die Zufallvariable *R_i* annehmen kann.
- Von jedem zu schätzenden Parameter müssen drei Varianten unterschieden werden:
 - λ bezeichnet den exakten aber im Empfänger nicht bekannten Parameterwert,
 - $\tilde{\lambda}$ bezeichnet eine beliebige im Empfänger angenommene Hypothese und
 - $\hat{\lambda}$ bezeichnet den von allen Hypothesen schließlich ausgewählten Schätzwert.

Beispiel:

Eine Spannung u ist zu messen. Der Spannung ist jedoch Rauschen additiv überlagert, so dass nur die Werte

$$r_k = u + w_k$$
 für $k=1,2,...,K$

beobachtet werden können. Darin sind die Werte w_k Realisierungen von Zufallsvariablen W_k , die den Rauschprozess beschreiben. Die Aufgabe ist es, u möglichst genau zu schätzen. Die Spannung wird hier als deterministische Größe angesehen, die aber unbekannt ist. Die bedingte WDF $p_{\underline{R}|u}(\underline{r}|u)$ wird als bekannt vorausgesetzt und ist im Falle statistisch unabhängiger Gauss-verteilter Zufallsvariablen gegeben durch

$$p_{\underline{R}|u}(\underline{r} \mid u) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} \exp\left(-\frac{(r_k - u)^2}{2\sigma_k^2}\right).$$
 (3-1)

3.1.2 Qualitätskriterien

Zur Beurteilung der Schätzgenauigkeit muss zunächst ein Qualitätsmaß $q(\underline{\lambda}, \tilde{\lambda})$ eingeführt werden, das die Abweichung einer Schätzhypothese $\tilde{\lambda}$ von dem exakten Parameterwert λ quantifiziert. Im Folgenden werden die drei wichtigsten Fehlermaße vorgestellt. Zur Vereinfachung der Nomenklatur beschränken wir uns im Folgenden auf nur einen einzelnen zu schätzenden Parameter, den wir mit λ bezeichnen wollen:

 Da in der Schätztheorie die Störgröße immer als Realisierung eines Zufallsprozesses aufgefasst wird, interessieren die Erwartungswerte dieser Maße, deren Minimierung das Ziel ist.

Man unterscheidet zwischen *stochastischen* und *deterministischen* Parametern. Stochastische Parameter werden durch die a-priori WDF $p_{\Lambda}(\lambda)$ beschrieben. Deterministische Parameter haben einen festen, aber unbekannten Wert. Bei stochastischen Parametern wird angenommen, dass sich ihr Wert innerhalb eines Beobachtungsintervalls nicht verändert. Von Beobachtung zu Beobachtung werden die angenommenen Werte im Allgemeinen aber als statistisch unabhängig angenommen.

3.1.3 Optimalschätzung für stochastische Parameter

Wir bezeichnen mit $p_{\Lambda}(\lambda)$ die a priori WDF des Parameters λ und mit $p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r})$ dessen a posteriori WDF. Die Verbund-WDF ist gegeben durch $p_{\Lambda,R}(\lambda,\underline{r}) = p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) \cdot p_{R}(\underline{r})$.

Der Erwartungswert des Schätzfehlers einer Hypothese $\tilde{\lambda}$ ergibt sich aus

$$E\left[q\left(\Lambda,\tilde{\lambda}(\underline{R})\right)\right] = \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\lambda,\tilde{\lambda}(\underline{r})\right) \cdot p_{\Lambda,\underline{R}}\left(\lambda,\underline{r}\right) d\lambda d\underline{r}$$

$$= \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right) \int_{-\infty}^{\infty} q\left(\lambda,\tilde{\lambda}(\underline{r})\right) \cdot p_{\Lambda|\underline{r}}\left(\lambda|\underline{r}\right) d\lambda d\underline{r}$$
(3-2)

Das innere Integral kann nie negative Werte annehmen, da beide Faktoren des Integralkerns stets positiv oder Null sind. Um den Erwartungswert zu minimieren, ist es daher notwendig und hinreichend, das innere Integral für jeden möglichen Beobachtungsvektor \underline{r} zu minimieren. Diese Aufgabe wird im Folgenden am Beispiel der drei oben genannten Fehlermaße durchgeführt.

1. Mittlerer quadratischer Fehler (Mean Square Error) q_{MSE}

$$q_{\rm MSE} = \int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{\kappa}} p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda - \tilde{\lambda}(\underline{r})\right)^2 \cdot p_{\Lambda|\underline{r}}\left(\lambda \mid \underline{r}\right) d\lambda d\underline{r}$$
(3-3)

Den Schätzer, der das innere Integral minimiert, nennen wir Minimum-Mean-Square-Error-Schätzer oder kurz MMSE-Schätzer. Der Schätzwert $\hat{\lambda}_{MMSE}(\underline{r})$ ergibt sich, indem das innere Integral nach $\tilde{\lambda}$ abgeleitet und zu Null gesetzt wird. Da die bedingte WDF nicht von $\tilde{\lambda}$ abhängt, ist nur der Ausdruck $(\lambda - \tilde{\lambda}(\underline{r}))^2$ zu differenzieren, was $-2\lambda + 2\tilde{\lambda}(\underline{r})$ ergibt. Damit erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda - \tilde{\lambda}(\underline{r})\right)^2 p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda + 2 \tilde{\lambda}(\underline{r}) \int_{\underline{s}}^{\infty} p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda .$$

Setzt man diesen Ausdruck zu Null und berücksichtigt, dass das letzte Integral den Wert eins ergibt (Eigenschaft einer WDF), folgt nach Umstellung für den optimalen Schätzwert

$$\hat{\lambda}_{\text{MMSE}}\left(\underline{r}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda p_{\Lambda|\underline{r}}\left(\lambda \mid \underline{r}\right) d\lambda$$
(3-4)

Ergebnis: Der optimale Schätzwert im Sinne des kleinsten mittleren quadratischen Fehlers ist der Erwartungswert von λ bezüglich der a posteriori WDF.

2. Mittlerer absoluter Fehler q_{abs}

$$q_{abs} = \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} p_{\underline{R}}(\underline{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \lambda - \tilde{\lambda}(\underline{r}) \right| \cdot p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda d\underline{r}$$
$$= \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} p_{\underline{R}}(\underline{r}) \left[\int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}(\underline{r})} (\tilde{\lambda}(\underline{r}) - \lambda) \cdot p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda + \int_{\tilde{\lambda}(\underline{r})}^{\infty} (\lambda - \tilde{\lambda}(\underline{r})) \cdot p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda \right] d\underline{r} \quad (3-5)$$

Nach der Aufspaltung der Grenzen für das innere Integral kann der optimale Schätzwert nun auch wieder mittels Ableitung nach $\tilde{\lambda}$ und Null setzen gewonnen werden. Nach Umstellung lässt sich als Bedingung für den optimalen Schätzwert

$$\int_{-\infty}^{\hat{\lambda}_{abs}(\underline{r})} p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) d\lambda = \int_{\hat{\lambda}_{abs}(\underline{r})}^{\infty} p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) d\lambda$$
(3-6)

angeben. Dies ist genau die Definition für den Medianwert der a posteriori WDF $p_{\Lambda|r}(\lambda|\underline{r})$.

Ergebnis: Der optimale Schätzwert im Sinne des kleinsten mittleren absoluten Fehlers ist der Medianwert von λ bezüglich der a posteriori WDF.

3. Mittlerer gleichförmiger Fehler q_{eq}

$$q_{\rm eq} = \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} p_{\underline{R}}(\underline{r}) \left[1 - \int_{\tilde{\lambda}(\underline{r}) - \Delta/2}^{\tilde{\lambda}(\underline{r}) + \Delta/2} p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda | \underline{r}) d\lambda \right] d\underline{r}$$
(3-7)

Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird genau dann minimal, wenn das innere Integral maximal wird. Eine besondere Bedeutung hat dieses Fehlermaß für den Grenzübergang $\Delta \rightarrow 0.$ Dann nämlich ist das Integral proportional zum Wert der a posteriori WDF an der Stelle $\tilde{\lambda}(\underline{r})$. Das Optimum liegt also in diesem Fall genau an der Stelle, an der $p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r})$ sein relatives Maximum hat. Der so optimierte Schätzwert wird deswegen *maximum a posteriori Schätzwert* oder kurz MAP-Schätzwert genannt. Dies wird in Abb. 3-2 veranschaulicht. Eine notwendige - jedoch nicht immer hinreichende - Bedingung für den Schätzwert ist, dass an diesem Punkt die Ableitung von $p_{\Lambda|r}(\lambda|\underline{r})$ nach λ Null ist.



Abb. 3-2: Zusammenhang zwischen MAP-Schätzer und gleichförmigen Fehlermaß

Bei der praktischen Behandlung des MAP-Schätzers hat es sich als zweckmäßig erwiesen, statt der WDF deren natürlichen Logarithmus zu betrachten. Da der Logarithmus eine monotone Funktion ist, liegt das Maximum an derselben Stelle wie in der ursprünglichen Funktion. Die Beziehung

$$\frac{d}{d\lambda} \ln p_{\Lambda|\underline{r}} \left(\lambda | \underline{r} \right) \bigg|_{\lambda = \hat{\lambda}_{MAP}(\underline{r})} = 0$$
(3-8)

wird oft auch als MAP-Gleichung bezeichnet. Äquivalent dazu ist die Bedingung

$$\frac{d}{d\lambda} \ln p_{\underline{R}|\lambda} \left(\underline{r} \mid \lambda\right) \bigg|_{\lambda = \hat{\lambda}_{MAP}(\underline{r})} + \frac{d}{d\lambda} \ln p_{\Lambda}(\lambda) \bigg|_{\lambda = \hat{\lambda}_{MAP}(\underline{r})} = 0, \qquad (3-9)$$

in der der Einfluss des Kanals in Form der Likelihoodfunktion und der Quellenstatistik in Form der a priori WDF separiert ist. ((3-9)ergibt sich aus (3-8) durch Anwendung der Bayes-Regel $p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda) \cdot p_{\Lambda}(\lambda) = p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda \mid \underline{r}) \cdot p_{\underline{R}}(\underline{r})$ und Berücksichtigung der Tatsache, dass $p_{\underline{R}}(\underline{r})$ nicht von $\tilde{\lambda}$ abhängt und somit bei der Differenziation Null ergibt.)

Beispiel 2:

Wir betrachten wieder das Schätzproblem aus Beispiel 1. u sei die Spannung einer Batterie aus einer Serienproduktion. Durch Fertigungstoleranzen kann diese Spannung von Exemplar zu Exemplar schwanken. Wir nehmen an, die Spannung sei eine Zufallsvariable U mit der Normalverteilung

$$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_U} \exp\left(-\frac{(u-\mu_U)^2}{2\sigma_U^2}\right)$$

mit Mittelwert μ_U und Streuung σ_U . Das Rauschen sei ebenfalls beschrieben durch eine Zufallsvariable mit der Normalverteilung $N(0, \sigma_W)$, unabhängig von k. Dann ist

$$p_{\underline{R}|u}(\underline{r} \mid u) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{W}} \exp\left(-\frac{(r_{k}-u)^{2}}{2\sigma_{W}^{2}}\right).$$

Für die Herleitung des optimalen Schätzverfahrens brauchen wir die a posteriori WDF. Diese ergibt sich mit Hilfe der Bayesregel wie folgt:

$$p_{U|\underline{r}}\left(u \mid \underline{r}\right) = \frac{p_{\underline{R}|u}\left(\underline{r}\mid u\right) \cdot p_{U}\left(u\right)}{p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{K+1} \sigma_{W}^{K} \sigma_{U} p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^{K} (r_{k}-u)^{2}}{2\sigma_{W}^{2}} - \frac{(u-\mu_{U})^{2}}{2\sigma_{U}^{2}}\right)$$

Es lässt sich zeigen, dass dies ebenfalls eine Normalverteilung für U ist. Um dies zu verifizieren und um Mittelwert und Streuung zu ermitteln, muss der Ausdruck in geschweiften Klammern auf die Form $C(u^2-2au+b)$ gebracht und dann quadratisch ergänzt werden, so dass ein Ausdruck der Form $C(u-a)^2 - C(a^2-b)$ entsteht. Darin ist der zweite Term zwar noch abhängig von \underline{r} , aber unabhängig von u und kann daher als Faktor $exp(-C(a^2-b))$ vor die Exponentialfunktion geschrieben werden. Dieser kann mit den übrigen Faktoren zu einer Konstanten $c(\underline{r})$ zusammengefasst werden. Es ergibt sich

$$p_{U|\underline{r}}\left(u \mid \underline{r}\right) = c\left(\underline{r}\right) \exp\left(-\frac{\left(u - \mu_{U|\underline{r}}\right)^2}{2\sigma_{U|\underline{r}}^2}\right)$$

mit dem a posteriori Mittelwert

$$\mu_{U|\underline{r}} = \frac{{\sigma_U}^2}{{\sigma_U}^2 + {\sigma_W}^2/K} \cdot \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r_k + \frac{{\sigma_W}^2/K}{{\sigma_U}^2 + {\sigma_W}^2/K} \cdot \mu_U$$

und der a posteriori Varianz

$$\sigma_{U|\underline{r}}^{2} = \frac{\sigma_{U}^{2} \sigma_{W}^{2}}{K \sigma_{U}^{2} + \sigma_{W}^{2}}.$$

Der optimale Schätzwert ergibt sich für die verschiedenen Fehlermaße wie folgt:

- 1. *MSE-Schätzung:* $\hat{u}_{MSE} = E[U | \underline{r}] = \mu_{U|\underline{r}}(\underline{r})$. Der Fehler selbst ist gegeben durch die a posteriori Varianz.
- 2. Die Schätzung für minimalen absoluten Fehler ist der Medianwert, der bei einer Normalverteilung gleich dem Mittelwert ist, so dass auch hier der optimale Schätzwert gegeben ist durch $\hat{u}_{abs} = \mu_{U|\underline{r}}(\underline{r})$.
- 3. *MAP-Schätzung: Der optimale Schätzwert liegt beim Maximum der WDF* $p_{U|\underline{r}}(u|\underline{r})$. *Bei einer Normalverteilung liegt dieses Maximum beim Erwartungswert, d.h. auch hier gilt* $\hat{u}_{MAP} = \mu_{U|r}(\underline{r})$.

Einige Anmerkungen zu diesem Beispiel:

- 1. Der optimale Schätzwert ist nicht einfach der lineare Mittelwert über r_k , wie man zunächst vermuten würde.
- 2. Für $\sigma_W^2 / K \gg \sigma_U^2$ (stark gestörte Beobachtung) gehen die beobachtbaren Werte kaum in die Schätzung ein. Die Schätzung liegt nahe am a priori Mittelwert μ_U .

3. Für $\sigma_w^2 / K \ll \sigma_u^2$ (schwache Störung im Vergleich zur a priori Varianz) konvergiert die optimale Schätzung gegen den linearen Mittelwert über rk. Der a priori Mittelwert geht kaum noch in die Schätzung ein.

Beispiel 3:

Wie Beispiel 2, jedoch nehmen wir als Verteilung für U eine Gleichverteilung im Intervall [*u*],*u*2] *an. Mit Hilfe der Bayesregel ergibt sich*

$$p_{U|\underline{r}}\left(u \mid \underline{r}\right) = \frac{p_{\underline{R}|u}\left(\underline{r}\mid u\right) \cdot p_{U}\left(u\right)}{p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right)}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_{W}\right)^{K} p_{\underline{R}}\left(\underline{r}\right)\left(u_{2}-u_{1}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{k=1}^{K}\left(r_{k}-u\right)^{2}}{2\sigma_{W}^{2}}\right) & \text{für } u_{1} \le u \le u_{2}\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion hat die Form einer abgeschnittenen Normalverteilung über u. Um den optimalen MAP-Schätzwert zu gewinnen, differenzieren wir den Logarithmus der Normalverteilung nach u und setzen das Ergebnis zu Null. Das Ergebnis ist die lineare Mittelung der beobachtbaren Werte r_k . Dies ist jedoch nur dann der optimale Schätzwert wenn das Maximum der a posteriori Verteilung innerhalb des Intervalls $[u_1,u_2]$ liegt. Ansonsten muss der Wert auf dieses Intervall begrenzt werden:

$$\hat{u}_{\text{MAP}}(\underline{r}) = \max\left\{u_1, \min\left(u_2, \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}r_k\right)\right\}.$$

Für $u_2 - u_1 >> \sigma_W$ ist die Begrenzung praktisch bedeutungslos, so dass

$$\hat{u}_{\text{MAP}}\left(\underline{r}\right) \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} r_k \tag{3-10}$$

angesetzt werden kann.

3.1.4 Optimalschätzung für deterministische Parameter: Der Maximum Likelihood Ansatz

Man ist geneigt, den Fall deterministischer Parameter als Sonderfall der stochastischen Parameter anzusehen, für den die WDF $p_{\Lambda}(\lambda)$ zu einer Delta-Funktion entartet. Mit diesem Ansatz ergibt sich als Optimalschätzung $\hat{\lambda}(\underline{r}) = \lambda$, was sicher den idealen Schätzwert darstellt, aber nicht besonders hilfreich ist, da λ ja gerade die gesuchte Größe ist, die es zu schätzen gilt. Daraus wird deutlich, dass hier andere Qualitätsmaße eingeführt werden müssen.

Obwohl λ deterministisch ist, sind die Schätzhypothesen $\tilde{\lambda}$ doch statistischer Natur, da sie eine Funktion von <u>R</u> sind und <u>R</u> als Zufallsvektor aufgefasst wird. Ein wichtiges Maß, das die Güte einer Hypothese zu beurteilen erlaubt, ist der Erwartungswert von $\tilde{\lambda}(\underline{R})$, der definiert ist durch

 $\mathbf{E}\left[\hat{\lambda}(\underline{R})\right] = \lambda,$

 $\mathbf{E}\left\lceil \hat{\lambda}(\underline{R}) \right\rceil = \lambda + B(\lambda).$

$$\mathbf{E}\left[\tilde{\lambda}(\underline{R})\right] = \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} \tilde{\lambda}(\underline{r}) \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda) d\underline{r}$$
(3-11)

Anhand des Erwartungswertes der optimalen Schätzhypothese $\hat{\lambda}(\underline{R}) = \hat{\lambda}(\underline{R})$ werden die Schätzverfahren in 3 Klassen eingeteilt:

- 1. erwartungstreue Schätzer (engl.: unbiased estimator):
- 2. Schätzer mit bekannter Ablage *B* (engl.: biased estimator): $E[\hat{\lambda}(\underline{R})] = \lambda + B$,
- 3. Schätzer mit unbekannter Ablage *B*, die von dem zu schätzenden Parameter λ abhängt:

Ein weiteres wichtiges Qualitätsmaß ist die Varianz des Schätzfehlers. Beim erwartungstreuen Schätzer ist sie definiert durch

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda\right) = \operatorname{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda\right)^{2}\right] = \int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{K}} \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right)^{2} p_{\underline{R}|\lambda}\left(\underline{r} \mid \lambda\right) d\underline{r}.$$
 (3-12)

Bei Schätzern mit Ablage ist der Erwartungswert der Differenz $E\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda - B\right)^2\right]$ zu bil-

den. Die Varianz ist ein Maß für die statistische Unsicherheit des Schätzergebnisses. Ein guter Schätzer weist eine kleine Varianz auf. Statt der Varianz gibt man häufig deren Wurzel an, die als Streuung oder Standardabweichung bezeichnet wird.

Im Gegensatz zu stochastischen Parametern gibt es für deterministische Parameter keine einfache Methode zur Bestimmung eines optimalen Schätzers. Ein bewährter Ansatz ist der Maximum Likelihood Ansatz. Dabei wird derjenige Parameterwert $\hat{\lambda}_{ML}$ gesucht, der die Likelihoodfunktion über alle Schätzhypothesen maximiert:

$$p_{\underline{R}|\hat{\lambda}}\left(\underline{r} \mid \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}\right) = \max_{\tilde{\lambda}} \left\{ p_{\underline{R}|\tilde{\lambda}}\left(\underline{r} \mid \tilde{\lambda}\right) \right\}$$
(3-13)

Für den optimalen Maximum Likelihood Schätzwert (kurz: ML-Schätzwert) $\hat{\lambda}_{ML}(\underline{r})$ lässt sich als notwendige Bedingung auch

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}} \ln p_{\underline{R}|\lambda} \left(\underline{r} \mid \tilde{\lambda}\right) \Big|_{\tilde{\lambda} = \hat{\lambda}_{\text{ML}}(\underline{r})} = 0$$
(3-14)

formulieren. Ein Vergleich mit dem MAP-Schätzer aus (3-9) lässt erkennen, dass beide Schätzer dasselbe Ergebnis liefern, wenn die a priori WDF an derselben Stelle $\hat{\lambda}_{MAP}(\underline{r})$ ein relatives Maximum aufweist wie die a posteriori WDF. Dann ist deren Ableitung 0 und die Quellenstatistik beeinflusst das Schätzergebnis nicht.

Beispiel 4: Wir wenden uns wieder dem bekannten Beispiel 1 der Schätzung eines Spannungswertes zu. Wir nehmen an, der Spannungswert sei deterministisch, aber unbekannt. Die Likelihoodfunktion ist gegeben durch (3-1). Wird der Logarithmus nach u abgeleitet und anschließend zu Null gesetzt folgt als Bedingung für den ML-Schätzwert

$$\sum_{k=1}^{K} 2(r_k - u_{\rm ML}) = 0.$$

Daraus folgt

$$\hat{u}_{\rm ML} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} r_k \,. \tag{3-15}$$

Der Vergleich mit (3-10) zeigt, dass MAP-Schätzung bei gleichverteilten Parametern identisch ist mit der ML-Schätzung bei deterministischen Parametern.

3.2 **Die Cramer-Rao Schranken**

3.2.1 Schranke für Schätzfehler bei deterministischen Parametern

Wenngleich oft keine geschlossene Herleitung für den optimalen Schätzalgorithmus möglich ist, so liefert die Theorie doch zumindest eine untere Schranke für den minimalen Schätzfehler des besten Schätzverfahrens. Diese kann als absoluter Maßstab zur Beurteilung von Schätzverfahren dienen. Diese Schranke wurde erstmals von dem Mathematiker Fisher im Jahre 1922 angegeben. Später, im Jahre 1946, wurde sie von den Mathematikern Cramér und Rao nochmals hergeleitet und seitdem wird die Schranke die Cramér-Rao Schranke genannt. Sie besteht aus folgendem

Satz:

Für jede erwartungstreue Schätzung $\hat{\lambda}(\underline{r})$ eines deterministischen Parameters λ gilt

$$E\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda}\right)^{2}\right]}$$
(3-16)

oder, was äquivalent ist

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{1}{-\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}\ln p_{\underline{R}|\lambda}\left(\underline{r}\mid\lambda\right)}{\partial\lambda^{2}}\right]}.$$
(3-17)

Voraussetzung ist, dass $\frac{\partial p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial^2 p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial \lambda^2}$ existieren und absolut integ-

rierbar sind.

Dieser wenig intuitive Zusammenhang wird nun bewiesen. Den Kern des Beweises bildet die Schwarz'sche Ungleichung

$$\int f^2(x)dx \cdot \int g^2(x)dx \ge \left(\int f(x) \cdot g(x)dx\right)^2,$$

in der die Gleichheit genau dann gilt, wenn

$$g(x) = c \cdot f(x),$$

wobei g(x) und f(x) reelle Funktionen einer reellen Variablen x sind und c eine beliebige reelle Konstante sein kann.

Beweis:

Empfängersynchronisation

- 3-10 - 3 Maximum Likelihood Parameterschätzung

Da die Schätzung erwartungstreu ist, gilt $\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}} (\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda) \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda) d\underline{r} = 0.$

Die Ableitung beider Seiten nach λ liefert

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}} \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda) d\underline{r} = \int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}} \frac{\partial\left(\left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)\right)}{\partial\lambda} d\underline{r} = 0.$$

Um Differenziation und Integration vertauschen zu können, muss $\frac{\partial p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda}$ existieren und absolut integrierbar sein (1. Voraussetzung).

Die Anwendung der Produktregel beim Differenzieren des Integralkerns liefert

$$-\int_{\underline{\underline{r\in\mathbb{R}^{\kappa}}}} p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda) d\underline{r} + \int_{\underline{\underline{r\in\mathbb{R}^{\kappa}}}} (\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda) \cdot \frac{\partial p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial \lambda} d\underline{r} = 0$$
(3-18)

Nun ersetzen wir $\frac{\partial p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda}$ durch $\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda} \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)$, was auf

$$\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}} \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot \frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda} \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda) d\underline{r} = 1$$

führt. Um die Schwarz'sche Ungleichung sinnvoll anwenden zu können, quadrieren wir beide Seiten und gruppieren die Terme des Integralkerns so um, dass wir

$$\left(\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}}\left\{\frac{\partial\ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\sqrt{p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}\right\}\cdot\left\{\sqrt{p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}\left(\hat{\lambda}(\underline{r})-\lambda\right)\right\}d\underline{r}\right)^{2}=1$$

erhalten. Die Terme in den geschweiften Klammern können nun als die beiden Funktionen f(x) und g(x) der Schwarz'schen Ungleichung aufgefasst werden. Somit gilt

$$\left\{\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}} \left(\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}{\partial\lambda}\right)^{2} \cdot p_{\underline{R}|\Lambda}(\underline{r}\mid\lambda) d\underline{r}\right\} \cdot \left\{\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}} \left(\hat{\lambda}(\underline{r})-\lambda\right)^{2} \cdot p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda) d\underline{r}\right\} \ge 1$$

Die beiden Integralterme sind genau die in (3-16) enthaltenen Erwartungswerte. Es folgt

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{1}{\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}{\partial\lambda}\right)^{2}\right]}.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teils beginnen wir mit der einfachen Beziehung

$$\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}}p_{\underline{R}\mid\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)d\underline{r}=1$$

Die erste Ableitung nach λ liefert

$$\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}}\frac{\partial}{\partial\lambda}p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)d\underline{r}=\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{\kappa}}\frac{\partial\ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial\lambda}p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)d\underline{r}=0.$$

Nochmaliges Differenzieren ergibt unter Anwendung der Produktregel

$$\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}}\frac{\partial^{2}\ln p_{\underline{R}\mid\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}{\partial\lambda^{2}}p_{\underline{R}\mid\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)d\underline{r}+\int_{\underline{r}\in\mathbb{R}^{K}}\left(\frac{\partial\ln p_{\underline{R}\mid\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)}{\partial\lambda}\right)^{2}p_{\underline{R}\mid\lambda}(\underline{r}\mid\lambda)d\underline{r}=0.$$

An dieser Stelle haben wir von der 2. Voraussetzung Gebrauch gemacht, dass nämlich $\frac{\partial^2 p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda^2}$ existiert und absolut integrierbar ist.

Die beiden Integrale bilden genau die Erwartungswerte in (3-16) und (3-17), für die folgt

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}\ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial\lambda^{2}}\right] = -\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial\ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)}{\partial\lambda}\right)^{2}\right].$$

Mit dieser Beziehung folgt der zweite Teil des Satzes unmittelbar aus dem ersten Teil.

Eine besondere Bedeutung haben Schätzwerte, für die (3-16) und (3-17) mit Gleichheit erfüllt sind. Derartige Schätzverfahren liefern Schätzwerte mit der theoretisch kleinstmöglichen Varianz und werden deswegen optimal genannt. Aus der Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung im Verlauf des Beweises ist unmittelbar ersichtlich, dass genau dann ein optimaler Schätzer existiert, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda)}{\partial \lambda} = \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot c(\lambda)$$
(3-19)

erfüllt ist. Darin ist $c(\lambda)$ eine beliebige reelle Konstante, die nicht von <u>r</u>, jedoch durchaus von λ abhängen darf. (*Die Bedingung* g(x) = cf(x) fordert von der Konstanten c nur, dass sie nicht von der Variablen x abhängt, die hier durch den Vektor <u>r</u> repräsentiert wird.) Ist (3-19) nicht erfüllt, existiert kein optimales Schätzverfahren.

Es interessiert nun die Frage, wie der ML-Schätzer zu bewerten ist. Aus der notwendigen Bedingung (3-14) folgt zusammen mit (3-19)

$$\left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot c(\lambda) \Big|_{\lambda = \hat{\lambda}_{ML}(\underline{r})} = 0$$
(3-20)

Unter Ausschluss des trivialen Falls $c(\hat{\lambda}_{ML}(\underline{r})) = 0$ folgt unmittelbar $\hat{\lambda}(\underline{r}) = \hat{\lambda}_{ML}(\underline{r})$.

Schlussfolgerung:

Wann immer ein optimaler Schätzer existiert, ist er identisch mit dem ML-Schätzer.

Das umgekehrte gilt nicht! D.h. es kann eine Lösung für den ML-Schätzer existieren, ohne dass die Bedingung (3-19) erfüllt ist. Dann kann man auch nicht sicher sein, ob es nicht einen

Schätzer gibt, der besser ist als der ML-Schätzer. Bisher konnte in den meisten Fällen jedoch kein Schätzer gefunden werden, der besser (im Sinne einer kleineren Varianz) ist als der ML-Schätzer. Und die wenigen Fälle, in denen es gelungen ist, etwas besseres zu finden, erwiesen sich die Schätzverfahren als nicht praktikabel, so dass immer der Maximum Likelihood Ansatz verwendet wird, um den besten Schätzer herzuleiten.

Zusammenfassend kann zur Cramér-Rao Schranke folgendes festgehalten werden:

- 1. Für jeden erwartungstreuen Schätzer ist die Varianz des Schätzfehlers nach unten begrenzt.
- 2. Der Maximum Likelihood Ansatz liefert den optimalen Schätzer, sofern die Beziehung (3-19) erfüllt ist. Dann liegt die Varianz des Schätzfehlers genau auf der Cramér-Rao Schranke.
- 3. Existiert kein optimaler Schätzer, ist Gleichung (3-19) also nicht erfüllt, kann über die Qualität der ML-Schätzung nichts ausgesagt werden. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass auch in diesen Fällen ML-Schätzung zu einem guten Ergebnis führt.
- 4. Die Berechnung der Cramér-Rao Schranke erfordert nur die Kenntnis der Likelihoodfunktion $p_{R|\lambda}(\underline{r}|\lambda)$.

3.2.2 Schätzung eines stochastischen Parameters

Die Überlegungen für deterministische Parameter lassen sich auf stochastische Parameter übertragen. Wenn man die bedingten WDFen $p_{\underline{R}|\Lambda}(\underline{r}|\lambda)$ durch die Verbund-WDFen $p_{\underline{\Lambda},\underline{R}}(\lambda,\underline{r})$ ersetzt, gelten die Beziehungen (3-16) und (3-17) analog, allerdings mit etwas komplexeren Voraussetzungen. Es gilt folgender

Satz:

Es sei <u>r</u> der Beobachtungsvektor und Λ eine Zufallsvariable. Der mittlere quadratische Fehler eines beliebigen Schätzwertes $\hat{\lambda}(\underline{r})$ erfüllt die Ungleichung

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\Lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{1}{\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial \ln p_{\Lambda,\underline{R}}}{\partial \lambda}(\lambda,\underline{r})\right)^{2}\right]}$$
(3-21)

oder, was äquivalent ist

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}\left(\underline{R}\right)-\Lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{1}{-\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}\ln p_{\Lambda,\underline{R}}\left(\lambda,\underline{r}\right)}{\partial\lambda^{2}}\right]}.$$
(3-22)

Dabei ist der Erwartungswert sowohl über \underline{R} als auch über zu nehmen.

Folgende Voraussetzungen sind notwendig:

1.
$$\frac{\partial p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda}$$
 existient und ist absolut integrierbar, (3-23)

2.
$$\frac{\partial^2 p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda^2}$$
 existient und ist absolut integrierbar, (3-24)

3. Im Falle einer nicht erwartungstreuen Schätzung muss die Ablage $B(\lambda)$ die Bedingung

$$\lim_{\lambda \to \infty} B(\lambda) \cdot p_{\Lambda}(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} B(\lambda) \cdot p_{\Lambda}(\lambda) = 0$$
(3-25)

erfüllen. Dabei ist $B(\lambda)$ definiert durch den bedingten Erwartungswert

$$B(\lambda) = \mathbb{E}\left[\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda\right] = \int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{k}} \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r} \mid \lambda) d\underline{r}.$$
(3-26)

Im Unterschied zur ersten Cramér-Rao Schranke ist zu beachten, dass dieser Satz sowohl für erwartungstreue Schätzer als auch für Schätzer mit Ablage gilt. Im letzteren Fall ist die linke Seite in (3-21) und (3-22) nicht die Varianz des Schätzfehlers!

Beweis:

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (3-26) mit $p_{\Lambda}(\lambda)$ und differenzieren anschließend nach λ :

$$\frac{\partial \big(p_{\Lambda}(\lambda) \cdot B(\lambda)\big)}{\partial \lambda} = -\int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{K}} p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r}) d\underline{r} + \int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{K}} \frac{\partial p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda} \big(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\big) d\underline{r} .$$

Dabei haben wir bereits von der 1. Voraussetzung (3-23) Gebrauch gemacht.

Nun integrieren wir über λ :

$$p_{\Lambda}(\lambda) \cdot B(\lambda) \Big|_{-\infty}^{\infty} = -1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\underline{r} \in \mathbb{R}^{K}} \frac{\partial p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda} \Big(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda \Big) d\underline{r} d\lambda.$$

Auf Grund der 3. Voraussetzung ist die linke Seite der Gleichung Null. Dann entspricht dies der Beziehung (3-18) aus dem Beweis der Cramér-Rao Schranke mit dem Unterschied, dass die bedingte WDF $p_{\underline{R}|\lambda}(\underline{r}|\lambda)$ durch die Verbund-WDF $p_{\underline{\Lambda},\underline{R}}(\lambda,\underline{r})$ zu ersetzen ist und die Integration sowohl über \underline{r} als auch über λ durchzuführen ist. Der Rest des Beweises ist daher äquivalent zum Beweis der Cramér-Rao Schranke für deterministische Parameter.

Ähnlich wie bei deterministischen Parametern spricht man bei stochastischen Parametern von optimaler Schätzung, wenn der mittlere quadratische Schätzfehler genau auf der Schranke liegt. Die Bedingung lautet hier

$$\frac{\partial \ln p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda} = \left(\hat{\lambda}(\underline{r}) - \lambda\right) \cdot c .$$
(3-27)

Darin ist *c* eine beliebige reelle Konstante, die weder von <u>*r*</u>, noch von λ abhängen darf, da die Integrationen in der Schwarz'schen Ungleichung sowohl über <u>*r*</u> als auch über λ durchzuführen sind und die Konstante *c* von keiner Integrationsvariablen abhängen darf.

Daraus lässt sich eine interessante Eigenschaft für die a posteriori WDF herleiten. Die Differenziation von (3-27) nach λ ergibt

$$\frac{\partial^2 \ln p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})}{\partial \lambda^2} = -c$$

Darin substituieren wir nun $\ln p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r}) = \ln(p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) \cdot p_{\underline{R}}(\underline{r})) = \ln p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) + \ln p_{\underline{R}}(\underline{r}).$ Da die Differentiation von $\ln p_{R}(\underline{r})$ nach λ Null ergibt, folgt

$$\frac{\frac{\partial^2 \ln p_{\Lambda|\underline{r}}}{\partial \lambda^2} = -c}{\partial \lambda^2}.$$
(3-28)

Nach zweimaliger Integration erhalten wir für die a posteriori WDF

$$p_{\Lambda|\underline{r}}(\lambda|\underline{r}) = \exp\left(-c\lambda^2 + c_1(\underline{r})\lambda + c_2(\underline{r})\right).$$
(3-29)

Das lässt folgende Schlüsse für optimale Schätzer zu:

- 1. Für stochastische Parameter existiert ein optimaler Schätzer, wenn die a posteriori WDF eine Gaußfunktion ist.
- 2. Ist sie keine Gaußfunktion, existiert auch kein optimaler Schätzer.
- 3. Der optimale Schätzer ist der MAP-Schätzer. Dies folgt aus einer Argumentation, die ganz analog ist zu der, die bei deterministischen Parametern zu dem ML-Schätzer als optimalen Schätzer geführt hat.
- 4. Ist die Optimalitätsbedingung erfüllt, ist der MAP-Schätzer äquivalent zum MMSE-Schätzer. Dies ist einfach damit zu begründen, dass es keinen Schätzer geben kann, der die Schranke (3-21) unterschreitet. Da der MAP-Ansatz aber bereits die Schranke mit Gleichheit erfüllt, kann MMSE nicht besser sein. MMSE kann aber auch nicht schlechter sein, da MMSE definitionsgemäß den mittleren quadratischen Fehler minimiert.
- 5. Die Berechnung der CRB erfordert nur die Kenntnis der Verbund-WDF $p_{\Lambda,\underline{R}}(\lambda,\underline{r})$.

3.2.3 Verallgemeinerung auf die gemeinsame Schätzung mehrerer Parameter

Die Schranken, die in den letzten beiden Abschnitten ausführlich behandelt wurden, lassen sich auf die gleichzeitige Schätzung von *L* Parametern verallgemeinern. Im Folgenden werden nur die Sätze ohne Beweis angegeben. Die Beweise kann man z.B. in dem Buch von Harry van Trees: "Detection, Estimation and Modulation Theory", John Wiley & Sons, 1968 nachlesen.

Zunächst betrachten wir wieder den Fall deterministischer Parameter. Zur kompakten Darstellung der Zusammenhänge führen wir eine Matrix **J** ein, die üblicher Weise Fishers Informations-Matrix genannt wird. Sie kann als Verallgemeinerung der Erwartungswerte auf der rechten Seiten in den Beziehungen (3-16) und (3-17) für *K* Parameter angesehen werden. Das Element in Zeile *i* und Spalte *j* der $L \times L$ -Matrix **J** ist definiert durch

$$J_{ij} = \mathbf{E}\left[\frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r} \mid \underline{\lambda})}{\partial \lambda_{i}} \cdot \frac{\partial \ln p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r} \mid \underline{\lambda})}{\partial \lambda_{j}}\right].$$
(3-30)

Empfängersynchronisation

Es lässt sich zeigen, dass J_{ij} auch in der Form $J_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r} | \underline{\lambda})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i}\right]$ darstellbar ist.

Die Verallgemeinerung der Cramer-Rao Schranke zur Schätzung deterministischer Parameter führt zu folgendem

Satz:

Für jede erwartungstreue Schätzung $\hat{\lambda}(\underline{r})$ eines Vektors $\underline{\lambda}$ mit K deterministischen Parametern λ_i gilt

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}_{i}\left(\underline{R}\right)-\lambda_{i}\right)^{2}\right]\geq\left[\mathbf{J}^{-1}\right]_{ii}$$
(3-31)

mit $[\mathbf{J}^{-1}]_{ii}$ als das *i*-te Diagonalelement der Matrix \mathbf{J}^{-1} .

Voraussetzung ist, dass $\frac{\partial p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r} | \underline{\lambda})}{\partial \lambda_i}$ und $\frac{\partial^2 p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r} | \underline{\lambda})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$ für alle *i* und *j* existieren und

absolut integrierbar sind.

Zur Verallgemeinerung der Schranke für stochastische Parameter benötigen wir eine kleine Erweiterung von Fishers Informationsmatrix. Die benötigte Matrix J_T besteht aus der Summe zweier Matrizen J_D und J_P , wobei J_D die ursprüngliche Matrix ist, die in (3-30) definiert ist (nun jedoch mit Λ als Zufallsvektor), und $\mathbf{J}_{\rm P}$ die a priori Information repräsentiert, deren Elemente definiert sind durch

$$J_{Pij} = E\left[\frac{\partial \ln p_{\Delta}(\underline{\lambda})}{\partial \lambda_{i}} \cdot \frac{\partial \ln p_{\Delta}(\underline{\lambda})}{\partial \lambda_{j}}\right]$$
$$= -E\left[\frac{\partial^{2} \ln p_{\Delta}(\underline{\lambda})}{\partial \lambda_{i} \partial \lambda_{j}}\right].$$
(3-32)

Satz:

Es sei <u>*r*</u> der Beobachtungsvektor und Λ ein Zufallsvektor. Der mittlere quadratische Fehler eines beliebigen Schätzwertes $\hat{\lambda}_i(\underline{r})$ erfüllt die Beziehung

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}_{i}\left(\underline{R}\right)-\lambda_{i}\right)^{2}\right]\geq\left[\mathbf{J}_{\mathrm{T}}^{-1}\right]_{ii}$$
(3-33)

mit $[\mathbf{J}_{T}^{-1}]_{ii}$ als das *i*-te Diagonalelement der Matrix $\mathbf{J}_{T}^{-1} = (\mathbf{J}_{D} + \mathbf{J}_{P})^{-1}$.

Voraussetzung ist, dass $\frac{\partial p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r}|\underline{\lambda})}{\partial \lambda_i}$ und $\frac{\partial^2 p_{\underline{R}|\underline{\lambda}}(\underline{r}|\underline{\lambda})}{\partial \lambda_i \partial \lambda_i}$ für alle i und j existieren und

absolut integrierbar sind. Im Falle nicht erwartungstreuer Schätzer sind noch Bedingungen ähnlich denen in (3-25) und (3-26) zu erfüllen.

3.3 Anwendung der Schätztheorie auf die Parameterschätzung in digitalen Nachrichtenempfängern

Die allgemeinen Überlegungen aus der Schätztheorie sollen nun auf die Parameterschätzung in digitalen Nachrichtenempfängern angewendet werden. Wir beschränken die Betrachtungen auf lineare Modulationsverfahren und den statischen AWGN-Kanal, dessen Impulsantwort in der äquivalenten Basisbanddarstellung durch $h(t) = \delta(t-\tau)e^{j\theta}$ gegeben ist.

Das beobachtbare Empfangssignal in äquivalenter Basisbanddarstellung ist gegeben durch

$$r(t) = s(t \mid \lambda, \underline{u}) + w(t).$$
(3-34)

Darin bezeichnet

- w(t) eine Musterfunktion eines weißen Gauß'schen Rauschprozesses mit der Rauschleistungsdichte N_0 . (Hinweis: in der Literatur wird hier häufig $2N_0$ angesetzt. Das ergibt sich, wenn man die in der Literatur übliche Umrechnung eines reellen HF-Signals in die äquivalente Basisbanddarstellung vornimmt. Wir verwenden jedoch bei der Umrechnung den Faktor $1/\sqrt{2}$, so dass die Leistung in der äquivalenten Basisbanddarstellung identisch ist mit der Leistung des zugehörigen HF-Signals. Diese Definition vermeidet einige Probleme.)
- s(t|...) das ungestörte Empfangssignal, das von einigen Parametern abhängt. Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit werden die für die Schätzung relevanten Parameter neben der Zeitvariablen t explizit angegeben.
- λ den zu schätzenden Parameter, der entweder die Frequenzablage ν , die Phase θ oder die Zeitverzögerung τ sein kann.
- <u>u</u> einen Vektor mit allen unerwünschten Parametern, die die Datensymbole a[i]und die anderen Synchronisationsparameter beinhalten. Wenn z.B. die Frequenzablage v zu schätzen ist, beinhaltet <u>u</u> auch θ und τ .

Für linear modulierte Signale ist das ungestörte Empfangssignal gegeben durch

$$s(t \mid \lambda, \underline{u}) = h e^{j(2\pi v t + \theta)} \sum_{i} a[i] g(t - iT - \tau).$$
(3-35)

Darin bezeichnet *h* den Kanalübertragungsfaktor.

Zur Anwendung der Ergebnisse der Schätztheorie auf einen Nachrichtenempfänger muss das Problem der Zeitdiskretisierung überwunden werden. Die Ergebnisse der Schätztheorie basieren auf der Annahme, dass ein Beobachtungsvektor <u>r</u> mit endlich vielen Elementen vorliegt. Im Nachrichtenempfänger liegt aber ein zeitkontinuierliches Signal r(t) vor. Zur Lösung des Problems betrachten wir vorübergehend ein Gedankenmodell gemäß Abb. 3-3.



Abb. 3-3: Gedankenmodell zur Zeitdiskretisierung der Signale in einem Trägerfrequenzempfänger

Das Filter hat den einzigen Zweck, die Leistung des Rauschsignals zu begrenzen, ohne das Nutzsignal zu verzerren. Diese Anforderung erfüllt z.B. ein idealer Tiefpass, dessen Grenzfrequenz f_{TP} größer als die halbe Nutzsignalbandbreite ist. Wir wollen mit $B = 2f_{TP}$ die gesamte Bandbreite des Filters bezeichnen. Am Ausgang ist die Leistung des Rauschens begrenzt auf BN_0 . Im Folgenden wollen wir das gefilterte Rauschsignal mit w'(t) und dessen Abtastwerte mit $w'[k] = w'(kT_A)$ bezeichnen.

Die Abtastung erfolgt mit der Rate $1/T_A = B$. Die Folge der Abtastwerte r[k] bildet die Basis für die Schätzung. Jeder Abtastwert kann dargestellt werden durch

$$r'[k] = s[k|\underline{\lambda},\underline{u}] + w'[k].$$
(3-36)

Durch diese Anordnung ist sichergestellt, dass die Folge der Abtastwerte die vollständige Information über das Nutzsignal enthält und die Störanteile in aufeinander folgenden Abtastwerten statistisch unabhängig voneinander sind.

Wir betrachten nun die Aufgabe, einen Parameter $\hat{\lambda}$ aus einem endlichen Intervall der Dauer T_0 entsprechend einer Anzahl von *K* Abtastwerten r'[1],...,r[K] zu schätzen. Wir nehmen an, dass der Parameter deterministisch, aber unbekannt ist. Als erstes wird der mathematische Zusammenhang für die WDF $p_{\underline{R'}|\lambda,\underline{u}}(\underline{r'}|\lambda,\underline{u})$ aufgestellt. Diese WDF ist sowohl zur Maximum-Likelihood-Schätzung als auch zur Berechnung der Cramer-Rao-Schranke notwendig.

Die Werte w[k] können als Realisierungen einer komplexen Zufallsvariablen W' mit der Normalverteilung

$$p_{W'}(w'[k]) = \frac{1}{\pi \sigma_{W'}^{2}} \exp\left\{-\frac{|w'[k]|^{2}}{\sigma_{W'}^{2}}\right\}$$
(3-37)

aufgefasst werden. Darin ist die Varianz gegeben durch $\sigma_{W}^2 = N_0 B = \frac{N_0}{T_A}$.

Da die Rauschanteile aufeinander folgender Abtastwerte statistisch unabhängig sind, ergibt sich die *K*-dimensionale WDF als *K*-faches Produkt der eindimensionalen WDF nach (3-37):

$$p_{\underline{W}'}(\underline{w}') = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{\pi \sigma_{W'}^{2}} \exp\left\{-\frac{|w'[k]|^{2}}{\sigma_{W'}^{2}}\right\}$$
$$= \frac{1}{\left(\pi \sigma_{W'}^{2}\right)^{K}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_{W'}^{2}} \sum_{k=1}^{K} |w'[k]|^{2}\right\}$$
(3-38)

Die Substitution $w'[k] = r'[k] - s[k|\lambda, \underline{u}]$ liefert schließlich die gesuchte Likelihood-Funktion

$$p_{\underline{R}|\underline{\lambda},\underline{u}}(\underline{r}'|\underline{\lambda},\underline{u}) = \frac{1}{(\pi\sigma_{W'}^{2})^{K}} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_{W'}^{2}}\sum_{k=1}^{K} |r'[k] - s[k|\underline{\lambda},\underline{u}]|^{2}\right\}.$$
(3-39)

3.3.1 Berechnung der Cramer-Rao-Schranke

Zunächst wollen wir damit die Cramer-Rao-Schranke berechnen, ohne ein spezielles Sendesignal anzunehmen. Dazu erweist es sich als vorteilhaft, von der zweiten Form der CRB gemäß (3-17) auszugehen.

Der natürliche Logarithmus von (3-39) ist gegeben durch

$$\ln p_{\underline{R}^{*}|\lambda,\underline{u}}\left(\underline{r}^{\prime}|\lambda,\underline{u}\right) = -\ln\left(\pi\sigma_{W^{*}}\right)^{K} - \frac{1}{\sigma_{W^{*}}}\sum_{k=1}^{K}\left(r^{\prime}[k] - s[k|\lambda,\underline{u}]\right)\left(r^{\prime*}[k] - s^{*}[k|\lambda,\underline{u}]\right).$$

Die Differentiation nach λ liefert nach Anwendung der Produktregel auf die einzelnen Summanden

$$\frac{\partial \ln p_{\underline{R}^{*}|\lambda,\underline{u}}(\underline{r}'|\lambda,\underline{u})}{\partial \lambda} = \frac{2}{\sigma_{W'}^{2}} \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial s[k|\lambda,\underline{u}]}{\partial \lambda} (r'^{*}[k] - s^{*}[k|\lambda,\underline{u}])\right\}.$$

Nochmalige Differentiation ergibt

$$\frac{\partial^2 \ln p_{\underline{R}^{\prime}|\lambda,\underline{u}}\left(\underline{r}^{\prime}|\lambda,\underline{u}\right)}{\partial \lambda^2} = \frac{2}{\sigma_{W^{\prime}}} \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial^2 s\left[k|\lambda,\underline{u}\right]}{\partial \lambda^2} \left(r^{\prime*}\left[k\right] - s^{*}\left[k|\lambda,\underline{u}\right]\right) - \left|\frac{\partial s\left[k|\lambda,\underline{u}\right]}{\partial \lambda}\right|^2\right\}.$$

Anschließend ist der Erwartungswert über alle r'[k] zu nehmen, d.h.

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}\ln p_{\underline{R}\mid\lambda,\underline{u}}\left(\underline{r}'\mid\lambda,\underline{u}\right)}{\partial\lambda^{2}}\right] = \frac{2}{\sigma_{W'}}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{R}\mathbf{e}\left\{\frac{\partial^{2}s\left[k\mid\lambda,\underline{u}\right]}{\partial\lambda^{2}}\left(\mathbf{E}\left[r'^{*}\left[k\right]\right] - s^{*}\left[k\mid\lambda,\underline{u}\right]\right) - \left|\frac{\partial s\left[k\mid\lambda,\underline{u}\right]}{\partial\lambda}\right|^{2}\right\}.$$

Der Erwartungswert von r'[k] bzgl. der WDF $p_{\underline{R}'|\lambda,\underline{u}}(\underline{r}'|\lambda,\underline{u})$ ist wegen der angenommenen Erwartungstreue (Voraussetzung für die CRB) identisch mit $s\lceil k|\lambda,\underline{u}\rceil$, so dass schließlich

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}\ln p_{\underline{R}^{'}|\lambda,\underline{u}}\left(\underline{r}'|\lambda,\underline{u}\right)}{\partial\lambda^{2}}\right] = -\frac{2}{\sigma_{W^{*}}^{2}}\sum_{k=1}^{K}\left|\frac{\partial s\left[k|\lambda,\underline{u}\right]}{\partial\lambda}\right|^{2}$$

folgt. Setzt man dies Ergebnis in (3-17) ein, resultiert für die CRB eines durch AWGN gestörten und abgetasteten Signals allgemein

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{\sigma_{W'}^{2}/2}{\sum_{k=1}^{K} \left|\frac{\partial s\left[k|\lambda,\underline{u}\right]}{\partial\lambda}\right|^{2}}.$$
(3-40)

Nun ist noch der Übergang von Abtastwerten zum zeitkontinuierlichen Signal zu vollziehen. Mit $\sigma_{W^2} = N_0 / T_A$ erhält man zunächst

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{N_{0}/2}{\sum_{k=1}^{K} \left|\frac{\partial s\left[k|\lambda,\underline{u}\right]}{\partial \lambda}\right|^{2} T_{A}}.$$
(3-41)

Für den Grenzübergang $T_A \rightarrow 0$ geht $K = T_0/T_A$ gegen unendlich, wenn man die Länge T_0 des Beobachtungsintervalls unverändert lässt. Die Summe geht dann in ein Integral über, so dass als

Cramer-Rao-Schranke

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R}) - \lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{N_{0}/2}{\int_{T_{0}} \left|\frac{\partial s(t \mid \lambda, \underline{u})}{\partial \lambda}\right|^{2} dt}$$
(3-42)

folgt. Die gesamte Herleitung ist auch im Anhang C zu finden. Diese Beziehung erweist sich als wesentlich einfacher zu berechnen als die ursprüngliche Version, da wir nur noch das ungestörte Empfangssignal $s[k|\lambda, \underline{u}]$ benötigen, was häufig in einer mathematisch kompakten Form darstellbar ist.

Nun ist die CRB noch von den unerwünschten Parametern \underline{u} abhängig. Prinzipiell wäre dies kein Problem, wenn diese als bekannt und deterministisch angenommen werden können. Wenn diese aber für verschiedene Beobachtungsintervalle verschieden sind und als statistische Größen behandelt werden müssen, ist noch der Erwartungswert über diese unerwünschten Parameter zu bilden. Dies ist i.A. nicht mehr geschlossen möglich. Jedoch lässt sich eine untere Schranke angeben, die häufig analytisch handhabbar ist und die sich oft als brauchbar erwiesen hat. Es gilt folgender

Satz:

Es sei $s(t | \lambda, \underline{u})$ eine (i. A. komplexe) Zeitfunktion, die von einem deterministischen Parameter λ und einem Vektor \underline{u} mit statistischen Parametern abhängt.

Ferner sei $r(t) = s(t | \lambda, \underline{u}) + w(t)$ ein beobachtbares Signal und w(t) eine (komplexe) Musterfunktion eines Gauss-Prozesses mit der spektralen Leistungsdichte N_0 .

Dann gilt für jeden erwartungstreuen Schätzwert $\hat{\lambda}$, der aus einem endlichen Intervall der Dauer T_0 des Signals r(t) gewonnen wird,

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\frac{N_{0}/2}{\int_{T_{0}}\left|\frac{\partial s(t\mid\lambda,\underline{u})}{\partial\lambda}\right|^{2}dt}\right] \geq \frac{N_{0}/2}{\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{T_{0}}\left|\frac{\partial s(t\mid\lambda,\underline{u})}{\partial\lambda}\right|^{2}dt\right]}.$$
(3-43)

Der letzte Term wird *modifizierte Cramer-Rao-Schranke* genannt und erlaubt häufig eine geschlossene Berechnung des Ausdrucks (im Gegensatz zum mittleren Term, der oft nicht geschlossen berechenbar ist).

Beweis:

Die erste Beziehung folgt unmittelbar aus (3-42).

Die zweite Beziehung ergibt sich unter Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung. Für eine positive Zufallsvariable X gilt allgemein

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{X}\right] \cdot \mathbf{E}\left[X\right] = \int \frac{1}{x} p_X(x) dx \cdot \int x p_X(x) dx \ge \left(\int \sqrt{\frac{1}{x}} p_X(x) \sqrt{x} p_X(x) dx\right)^2 = 1.$$

Daraus folgt: $E\left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor \ge \frac{1}{E[X]}$ (für Prob $\{X > 0\} = 1$).

Die Beziehungen (3-43) bilden die Grundlage zur Berechnung von Cramer-Rao-Schranken für Parameterschätzung in Nachrichtenempfängern.

3.3.2 Maximum Likelihood Schätzung aus einem endlichen Beobachtungsintervall

Der allgemeine Ansatz zur ML-Schätzung lautet: Finde denjenigen Parameter $\hat{\lambda}_{ML}$, der die Likelihoodfunktion maximiert, d.h.

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \arg \max_{\tilde{\lambda}} \left\{ p_{\underline{R}' \mid \lambda} \left(\underline{r} \mid \tilde{\lambda} \right) \right\}.$$

Dabei fokussieren wir uns zunächst auf ein endliches Beobachtungsintervall der Dauer L_0T . Dafür stellt die Beziehung (3-39) den Ansatz zur Berechnung der Likelihoodfunktion dar, wobei der exakte Parameterwert λ durch eine Variable - die Schätzhypothese $\tilde{\lambda}$ - ersetzt werden muss. $\tilde{\lambda}$ ist also als freie Variable in der Likelihoodfunktion zu betrachten.

Da wir nur an der Maximierung der Funktion über $\hat{\lambda}$ interessiert sind, können wir auch jede Modifikation dieser Funktion betrachten, sofern das Maximum für denselben Wert $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}$ erhalten bleibt. Insbesondere können wir den Faktor vor der Exponentialfunktion ignorieren, da er keinen Einfluss auf die Lage des Maximums hat.

Wir modifizieren die Funktion weiter, indem wir die Betragsquadrate im Exponenten ausmultiplizieren. Dies ergibt für den Summenausdruck:

$$\sum_{k=1}^{K} \left| r'[k] - s\left[k \left| \tilde{\lambda}, \underline{u} \right] \right|^2 = \sum_{k=1}^{K} \left| r'[k] \right|^2 - 2\sum_{k=1}^{K} \operatorname{Re}\left\{ r'[k] s^*\left[k \left| \tilde{\lambda}, \underline{u} \right] \right\} + \sum_{k=1}^{K} \left| s\left[k \left| \tilde{\lambda}, \underline{u} \right] \right|^2 \quad (3-44)$$

Darin ist der erste Term von $\tilde{\lambda}$ unabhängig, hat daher für die Maximalwertfindung keinerlei Bedeutung und kann ebenfalls ignoriert werden. Wir können als Likelihoodfunktion also auch

$$L_{K}\left(\tilde{\lambda},\underline{u}\right) = \exp\left\{\frac{2}{N_{0}}\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{K}r'[k]s^{*}\left[k\left|\tilde{\lambda},\underline{u}\right.\right]T_{A}\right\} - \frac{1}{N_{0}}\sum_{k=1}^{K}\left|s\left[k\left|\tilde{\lambda},\underline{u}\right.\right]\right|^{2}T_{A}\right\}.$$
 (3-45)

verwenden. Für den Grenzübergang $T_A \rightarrow 0$ geht $K = T_0/T_A$ gegen unendlich und die Summenausdrücke können durch die Integrale der entsprechenden Zeitfunktionen ersetzt werden. Ferner kann r'(t) durch r(t) ersetzt werden, so dass folgt

$$L(\tilde{\lambda},\underline{u}) = \exp\left\{\frac{2}{N_0}\int_{T_0} \operatorname{Re}\left\{r(t)s^*(t \mid \tilde{\lambda},\underline{u})\right\}dt - \frac{1}{N_0}\int_{T_0}\left|s(t \mid \tilde{\lambda},\underline{u})\right|^2 dt\right\}.$$
 (3-46)

An dieser Stelle können wir das Gedankenmodell mit der Zeitdiskretisierung wieder verlassen, da wir nun einen Ausdruck für die Likelihoodfunktion haben, der nur noch die kontinuierlichen Signale enthält. Zur weiteren Vereinfachung setzen wir für $s(t | \tilde{\lambda}, \underline{u})$ die rechte Seite von (3-35) ein. Für den ersten Term aus (3-46) erhalten wir

$$\int_{T_0} \operatorname{Re}\left\{r(t)s^*(t \mid \tilde{\lambda}, \underline{u})\right\} dt = h \sum_i \operatorname{Re}\left\{e^{-j\theta}a^*[i]\int_{T_0}r(t)e^{-j2\pi vt}g^*(t - iT - \tau)dt\right\}.$$
 (3-47)

In der rechten Seite ist einer der Parameter θ , ν oder τ noch durch die entsprechende Hypothese zu ersetzen, während alle anderen - auch die Datensymbole a[i] - zum Vektor \underline{u} der unerwünschten aber als bekannt angenommenen Parameter gezählt werden.

Der zweite Term liefert

$$\int_{T_0} \left| s\left(t \mid \tilde{\lambda}, \underline{u}\right) \right|^2 dt = h^2 \sum_i \sum_k a[i] a^*[k] \int_{T_0} g\left(t - iT - \tau\right) g^*\left(t - kT - \tau\right) dt$$
(3-48)

Auf Grund des endlichen Integrationsintervalls müssen wir streng genommen 3 Fälle unterscheiden:

- 1. Alle Indizes *i*, für die $g(t-iT-\tau)$ vollständig innerhalb des Integrationsintervalls liegt,
- 2. Alle Indizes *i*, für die $g(t-iT-\tau)$ vollständig außerhalb des Integrationsintervalls liegt (für diese ergeben die Integrale den Wert 0)
- 3. Alle Indizes *i*, für die $g(t-iT-\tau)$ nur teilweise innerhalb des Integrationsintervalls liegt.

Um die Behandlung nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir an, dass das Beobachtungsintervall T_0 sehr viel größer ist als die Dauer des Modulationsgrundimpulses g(t). Dann nämlich können wir näherungsweise ansetzen, dass $L_0 = \lfloor T_0 / T \rfloor$ aufeinander folgende Symbole vollständig innerhalb des Integrationsintervalls liegen, während alle anderen vollständig außerhalb liegen.

Mit dieser Näherung ist offensichtlich das Integral in (3-48) nur noch abhängig von (i-k)Tund damit unabhängig von τ . Da der gesamte Ausdruck (3-48) von überhaupt keinem Synchronisationsparameter abhängt, trägt er nichts zum ML-Ansatz bei und kann somit bei der weiteren Betrachtung entfallen. Was übrig bleibt, ist der Ausdruck aus (3-47). Damit reduziert sich die Näherung der Likelihoodfunktion auf

$$L(\tilde{\lambda},\underline{u}) \approx \exp\left\{\frac{2}{N_0} \operatorname{Re}\left\{\int_{T_0} r(t) s^*(t \mid \tilde{\lambda},\underline{u}) dt\right\}\right\}.$$
(3-49)

Setzt man für $s(t | \tilde{\lambda}, \underline{u})$ den Summenausdruck aus (3-35) ein, erhält man

$$L(\tilde{\lambda},\underline{u}) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0} \operatorname{Re}\left\{\int_{T_0} r(t) e^{-j(2\pi v t + \theta)} \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] g^*(t - kT - \tau) dt\right\}\right\}.$$
 (3-50)

Wie oben bereits erwähnt, ist der zu bestimmende Synchronisationsparameter noch durch die entsprechende Schätzhypothese zu ersetzen. Zum Beispiel muss zur Ermittlung der Frequenzablage in (3-50) v durch \tilde{v} ersetzt werden. Dann lautet die Likelihoodfunktion

$$L(\tilde{\nu},\underline{u}) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0} \operatorname{Re}\left\{\int_{T_0} r(t) e^{-j(2\pi\tilde{\nu}_t+\theta)} \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] g^*(t-kT-\tau) dt\right\}\right\}.$$

Darin sind θ , τ sowie die Datensymbole a[i] für $i = 1, 2, ..., L_0$ die Elemente des Vektors \underline{u} , die in dieser Form als bekannt vorausgesetzt werden. Sind nur die Datensymbole bekannt, nicht aber θ und τ , dann sind auch θ und τ durch ihre Schätzhypothesen zu ersetzen und wir erhalten die Likelihoodfunktion als Funktion der Hypothesen aller drei Parameter

$$L(\tilde{\nu},\tilde{\theta},\tilde{\tau},a[1],...,a[L_0]) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0}\operatorname{Re}\left\{\int_{T_0}r(t)e^{-j(2\pi\tilde{\nu}t+\tilde{\theta})}\sum_{k=1}^{L_0}a^*[k]g^*(t-kT-\tilde{\tau})dt\right\}\right\}.$$

Nach Vertauschen von Summation und Integration lässt sich das Integral aus (3-49) schließlich darstellen durch

$$\int_{T_0} r(t) s^*(t | \tilde{\nu}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau}, \underline{u}) dt \approx h e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] x[k]$$

mit

$$x[k] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi\tilde{v}t} g^* (t - kT - \tilde{\tau}) dt.$$
 (3-51)

Damit resultiert als Likelihoodfunktion für einen Signalausschnitt der Dauer L_0T

$$L\left(\tilde{\nu},\tilde{\theta},\tilde{\tau},a[1],a[2],...,a[L_0]\right) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0}\operatorname{Re}\left\{e^{-j\tilde{\theta}}\sum_{k=1}^{L_0}a^*[k]x[k]\right\}\right\}.$$
(3-52)

Daraus folgt eine grundlegende Erkenntnis: Ein ML-Schätzer basiert auf Werten x[k], die sich aus einer Signal-angepassten Filterung (matched Filter) des Frequenz-verschobenen Empfangssignals r(t) nach Abtastung im Symboltakt ergeben. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Bandbreite des Sendesignals. Selbst wenn das Shannon'sche Abtasttheorem verletzt ist, reicht zur ML-Schätzung ein Abtastwert pro Symbol aus!

Die Abtastwerte im Symboltakt bilden hinsichtlich der ML-Schätzung eine hinreichende Statistik (engl.: set of sufficient statistics).

Für die Annahme, dass alle Datensymbole bekannt sind, ergibt sich unmittelbar die optimale Struktur eines ML-Schätzers gemäß Abb. 3-4. Er liefert eine Größe, die abgesehen von dem Faktor $2h/N_0$ dem Logarithmus der Likelihoodfunktion entspricht. Sie wird deswegen auch Log-Likelihoodfunktion genannt. Wir wollen sie abkürzend mit logL(.) bezeichnen.



Abb. 3-4: Gewinnung des Log-Likelihoodwertes aus dem Empfangssignal

Nun gilt es, diejenigen Schätzwerte $\hat{v}, \hat{\theta}$ und $\hat{\tau}$ zu ermitteln, für die die Likelihoodfunktion $L(\tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau})$ maximal wird. Natürlich führt die Maximierung der Log-Likelihoodfunktion $\log L(\tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau})$ zum selben Ergebnis, da der Logarithmus eine monotone Funktion ist.

Empfängersynchronisation

Unglücklicher Weise lassen sich die gesuchten Synchronisationsparameter häufig nicht direkt durch Umkehrung der Log-Likelihoodfunktion berechnen. In einigen Fällen bleibt nichts anderes übrig, als für den gesuchten Parameter (z.B. die Frequenz) mehrere Werte probeweise einzusetzen, die Werte der Log-Likelihoodfunktion nach (3-52) und (3-51) zu berechnen und sich so iterativ an das Maximum heranzutasten. Dies erscheint zunächst nicht besonders praktikabel. Dennoch bildet der ML-Ansatz die Basis, aus der mittels Näherungen praktikable Schätzalgorithmen hergeleitet werden können.

3.3.3 Rekursive Parameterschätzung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Parameterschätzung auf der Basis eines endlichen Beobachtungsintervalls betrachtet. In vielen Fällen ist eine derartige Schätzung aber gar nicht durchführbar, insbesondere dann nicht, wenn die Datensymbole nicht bekannt sind. Dann muss die Parameterschätzung auf einer rekursiven Struktur basieren, in der nach jedem Symboltakt ein verbesserter Schätzwert gewonnen wird, der dann zur Schätzung des nächsten Datensymbols herangezogen wird.

In rückgekoppelten Anordnungen zur Parameterschätzung wird immer ein Fehlersignal e[k]im Symboltakt benötigt, das ein Maß für die Abweichung vom optimalen Parameterwert λ darstellt. Die Verbesserung der Schätzung erfolgt üblicher Weise nach der rekursiven Vorschrift

$$\hat{\lambda}[k+1] = \hat{\lambda}[k] + \gamma e[k]. \tag{3-53}$$

Darin ist γ eine reellwertige positive Konstante, mit der das dynamische Verhalten und die äquivalente Rauschbandbreite des Regelkreises beeinflusst werden kann. (3-53) ist die zeitdiskrete Version eines analogen Integrators. Abb. 3-5 zeigt das entsprechende Blockschaltbild.



Abb. 3-5: Rekursive Erzeugung eines Schätzwertes aus dem Fehlersignal *e*[*k*] nach (3-53).

Die Fehlerwerte e[k] hängen i.A. nicht nur vom Schätzfehler $\Delta\lambda[k] = \lambda - \hat{\lambda}[k]$ ab, sondern auch von Datensymbolen und dem Rauschsignal. Da Daten und Rauschen zufälligen Charakter haben, ist e[k] als Zufallsvariable zu betrachten. Damit e[k] dennoch ein brauchbares Fehlermaß darstellt, ist es notwendig, dass der Erwartungswert von e[k] über die Datensymbole und über die Rauschwerte einen eindeutigen Zusammenhang mit dem Schätzfehler $\Delta\lambda[k]$ hat. Dies ist üblicher Weise eine nichtlineare Funktion, die häufig die Form eines liegenden "S" hat und deswegen auch S-Kurve genannt wird. Sie ist für einen vorgegebenen Fehler $\Delta\lambda$ definiert als Erwartungswert von e[k] über alle Störgrößen, d.h.

$$S(\Delta \lambda) = \mathbf{E} \left[e[k] | \Delta \lambda \right]$$
(3-54)

mit

$$\Delta \lambda = \lambda - \hat{\lambda} . \tag{3-55}$$

Die Folge e[k] wird hier als Realisierung eines stationären Prozesses aufgefasst. Dann sind die Erwartungswerte und damit auch die S-Kurve unabhängig vom Zeitindex k. Deswegen wurde k in den Beziehungen (3-54) und (3-55) weggelassen. Häufig ist die S-Kurve jedoch abhängig von E_{S}/N_0 und der Symbolkonstellation des Modulationsalphabets. Damit e[k] als Fehlermaß

taugt, muss die S-Kurve bei $\Delta \lambda = 0$ erstens eine Nullstelle und zweitens eine positive Steigung aufweisen. Dann gibt das Vorzeichen von *S*(.) die Richtung an, in die der Schätzwert zu korrigieren ist.

Mit der Definition (3-54) kann e[k] dargestellt werden durch

$$e[k] = S(\Delta \lambda) + n_e[k], \qquad (3-56)$$

wobei $S(\Delta \lambda)$ den Nutzanteil repräsentiert und $n_e[k]$ als mittelwertfreier Störanteil interpretiert werden kann. Auf der Grundlage dieser Zusammenhänge ergibt sich nun unmittelbar das regelungstechnische Ersatzschaltbild nach Abb. 3-6. Es enthält zusätzlich ein optionales Schleifenfilter, mit dem die dynamischen und die stationären Eigenschaften des Regelkreises optimiert werden können. Die Struktur ähnelt der einer Phasenregelschleife (PLL). Die S-Kurve entspricht der Nichtlinearität in einer PLL. Das Schleifenfilter ist die zeitdiskrete Version des PLL-Schleifenfilters. Es wird durch seine Z-Transformierte F(z) beschrieben. Der anschließende Akkumulator mit dem Faktor γ stellt die zeitdiskrete Version des VCO in der PLL dar. Einzig der Einfügepunkt für das Störsignal ist unterschiedlich.

Um ein gewünschtes stationäres Verhalten der Regelschleife zu erreichen, lassen sich für das Schleifenfilter ähnliche Bedingungen angeben, wie sie für die PLL hergeleitet wurden. Dabei sind nur die Regeln beim Übergang von der Laplace-Transformation auf die Z-Transformation konsequent anzuwenden: Die imaginäre Achse der s-Ebene bildet sich auf den Einheitskreis in der z-Ebene ab und s = 0 wird in z = 1 überführt. Will man einen zeitlichen Sprung des Parameters $\lambda[k]$ ausregeln, darf F(z) also keine Nullstelle bei z = 1 haben, insbesondere kann auch F(z) = 1 gewählt werden. Zur Ausregelung eines mit der Zeit linear ansteigenden bzw. abfallenden Wertes λ muss F(z) eine Polstelle bei z = 1 besitzen, u.s.w.



Abb. 3-6: Regelungstechnisches Ersatzschaltbild eines rekursiven Parameterschätzers

Ein Schätzer nach Abb. 3-6 ist immer erwartungstreu, wenn $S(\Delta \lambda)$ nur eine Nullstelle mit positiver Steigung bei $\Delta \lambda = 0$ besitzt. Sind mehrere Nullstellen mit positiver Steigung vorhanden, besteht immer das Risiko, dass der Regelkreis auf eine der anderen Nullstellen einrastet.

Zur Analyse des Rauschverhaltens im eingeschwungenen Zustand wird $S(\Delta \lambda)$ im Punkt $\Delta \lambda = 0$ linear approximiert und die Übertragungsfunktion des linearisierten Systems von $n_e[k]$ nach $\hat{\lambda}[k]$ bestimmt. Die Steigung der S-Kurve für $\Delta \lambda = 0$ wird mit K_D bezeichnet. Also gilt

$$K_{\rm D} = \frac{dS(x)}{dx} \bigg|_{x=0}.$$
 (3-57)

Zur Vereinfachung kann man den Additionspunkt für den Störterm nach vorn verlagern, so dass ein linearisiertes Ersatzschaltbild nach Abb. 3-7 entsteht.



Abb. 3-7: Linearisiertes Ersatzschaltbild der Rückkopplungsstruktur nach Abb. 3-6.

Die Z-Transformierte des offenen Regelkreises ist gegeben durch $K_{\rm D}\gamma \frac{F(z)}{z-1}$. Daraus erhält

man

$$H_{\lambda}(z) = \frac{K_{\rm D}\gamma F(z)}{z - 1 + K_{\rm D}\gamma F(z)}$$
(3-58)

als Z-Transformierte des gesamten Systems. Bezüglich des Störsignals $n_e[k]$ ist diese noch durch K_D zu dividieren. Damit resultiert

$$H_{e}(z) = \frac{\gamma F(z)}{z - 1 + K_{\rm D} \gamma F(z)}.$$
(3-59)

Oft verzichtet man auf das Schleifenfilter, so dass $F(z) \equiv 1$ gesetzt werden kann.

Wie bei einem PLL ist die äquivalente Rauschbandbreite eine wichtige und aussagekräftige Kenngröße eines Regelkreises. Für zeitdiskrete Systeme mit dem Abtastintervall *T* ist sie definiert durch

$$B_{\rm L} = \frac{\int_{-0.5/T}^{0.5/T} \left| H_e \left(e^{j2\pi fT} \right) \right|^2 df}{\left| H_e \left(z = 1 \right) \right|^2} \,. \tag{3-60}$$

Mit der Beziehung (3-59) und $H_e(z=1)=1/K_D$ resultiert

$$B_{\rm L} = K_{\rm D}^2 \gamma^2 \int_{-0.5/T}^{0.5/T} \frac{\left|F\left(e^{j2\pi fT}\right)\right|^2}{\left|e^{j2\pi fT} - 1 + K_{\rm D}\gamma F\left(e^{j2\pi fT}\right)\right|^2} df .$$
(3-61)

Für den wichtigen Sonderfall, dass auf das Schleifenfilter verzichtet wird, liefert das Integral die geschlossene Lösung

$$B_{\rm L}T = \frac{K_{\rm D}\gamma}{2 - K_{\rm D}\gamma} \text{ für } F(z) = 1.$$
(3-62)

Die Herleitung ist am Ende dieses Kapitels zu finden. Offensichtlich muss $K_D\gamma$ kleiner als 1 sein, da ansonsten die äquivalente Rauschbandbreite größer als die Symbolrate wäre. Um eine wirksame Rauschunterdrückung zu erreichen, muss B_L deutlich kleiner als die Symbolrate sein. Typischer Weise wählt man γ daher so, dass $\gamma \ll 1/K_D$ gilt.

Unter der Annahme, dass die Abtastwerte $n_e[k]$ statistisch unabhängig voneinander sind, ist die Varianz des Schätzwertes $\hat{\lambda}[k]$ gegeben durch $\sigma_{\lambda}^2 = B_{\rm L}T\sigma_e^2$, wobei σ_e^2 die Varianz von e[k] ist.

Es interessiert nun die Frage, wie man die Qualität eines rekursiven Schätzers beurteilen muss. Dazu wäre ein Vergleich mit der Cramer-Rao-Schranke wünschenswert. Die Cramer-Rao-Schranke gilt jedoch nur für nicht-rekursive Schätzer mit einem festen Beobachtungsintervall der Länge L_0 , in das alle Symbole mit gleichem Gewicht eingehen. Bei einem rekursiven System nimmt der Einfluss weiter zurückliegender Symbole jedoch exponentiell ab. Um dennoch einen Vergleich mit der Cramer-Rao-Schranke durchführen zu können, bedient man sich eines Tricks: Man überführt das rekursive System in ein nicht-rekursives mit gleicher Fehlervarianz. Dieser Ansatz ermöglicht es, einen Zusammenhang des Parameters γ des rekursiven Systems mit der Länge L_0 des Beobachtungsintervalls des äquivalenten nichtrekursiven Systems herzustellen. L_0 nennt man dann die zu γ äquivalente Beobachtungsdauer.

In einem nicht-rekursiven System wird über eine einfache Mittelung über L_0 Werte e[k] ein Schätzwert für die Differenz zum tatsächlichen Parameter λ gewonnen. Dann ist die Fehlervarianz bei statistisch unabhängigen Abtastwerten $n_e[k]$ gegeben durch σ_e^2/L_0 . Dies entspricht der bestmöglichen Rauschunterdrückung. Aus dem Ansatz gleicher Rauschvarianz der Schätzvariablen, also $\sigma_e^2/L_0 = B_{\rm L}T\sigma_e^2$, erhält man unmittelbar die Länge des äquivalenten nicht-rekursiven Systems gemäß

$$L_0 = \frac{1}{B_{\rm L}T} \left(= \frac{2}{K_{\rm D}\gamma} - 1 \text{ für } F(z) = 1 \right).$$
(3-63)

Abschließend wollen wir noch einen allgemein gültigen Ansatz zur Erzeugung des Fehlersignals e[k] für Maximum Likelihood Schätzung angeben. Die Ableitung der Likelihoodfunktion $L(\hat{\lambda})$ nach der Schätzhypothese $\hat{\lambda}$ hat an dem gewünschten Wert $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}$ eine Nullstelle und eine negative Steigung, so dass die Ableitung für Werte $\hat{\lambda} > \hat{\lambda}$ einen negativen Wert liefert. Dieser kann direkt zur Korrektur herangezogen werden. Das gleiche gilt natürlich auch für die Ableitung des *Logarithmus* der Likelihoodfunktion. Da sich der Logarithmus leicht aus dem Empfangssignal berechnen lässt, bietet sich als Fehlermaß

$$e[k] = \frac{\partial \ln L(\tilde{\lambda},...)}{\partial \tilde{\lambda}}$$
(3-64)

mit L(.) aus (3-52) an. Auf die Mittelung über L_0 Symbole kann bei rückgekoppelten Strukturen verzichtet werden, da die Rauschunterdrückung auf anderem Wege, nämlich durch ein hinreichend kleinen Faktor γ und/oder ein schmalbandiges Schleifenfilter erreicht werden kann. Für $L_0 = 1$ ergibt sich aus (3-52) als mögliches Fehlersignal für eine rückgekoppelte Anordnung zur ML-Schätzung

$$e[k] = \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}} \operatorname{Re}\left\{ e^{-j\tilde{\theta}} a^*[k] \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi\tilde{v}t} g^*(t-kT-\tilde{\tau}) dt \right\} \operatorname{mit} \tilde{\lambda} \in \left\{ \tilde{v}, \tilde{\theta}, \tilde{\tau} \right\}.$$
(3-65)

Darin ist $\tilde{\lambda}$ für Frequenzschätzung durch $\tilde{\nu}$, für Phasenschätzung durch $\tilde{\theta}$ und für Zeitschätzung durch $\tilde{\tau}$ zu ersetzen. Weiterführende Betrachtungen werden in den folgenden Kapiteln zur Frequenz-, Phasen- und Taktschätzung angestellt.

Herleitung der Beziehung (3-62):

Aus (3-61) folgt mit
$$F(z) = 1$$
: $B_{\rm L} = K_{\rm D}^2 \gamma^2 \int_{-0.5/T}^{0.5/T} \frac{1}{\left|e^{j2\pi fT} - 1 + K_{\rm D}\gamma\right|^2} df$.

Sync3ML-Ansatz.doc

Mit der Eulerschen Beziehung $e^{j2\pi fT} = \cos(2\pi fT) + j\sin(2\pi fT)$ erhält man

$$B_{\rm L} = K_{\rm D}^2 \gamma^2 \int_{-0.5/T}^{0.5/T} \frac{1}{\left(K_{\rm D}\gamma - 1 + \cos\left(2\pi fT\right)\right)^2 + \sin^2\left(2\pi fT\right)} df$$
$$= K_{\rm D}^2 \gamma^2 \int_{-0.5/T}^{0.5/T} \frac{1}{\left(K_{\rm D}\gamma - 1\right)^2 + 1 + 2\left(K_{\rm D}\gamma - 1\right)\cos\left(2\pi fT\right)} df$$

Das Integral ist von der Form $\int \frac{1}{b + c \cos ax} dx$, für das man in Tabellen als Lösung

 $\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \arctan\frac{(b-c)\tan(ax/2)}{\sqrt{b^2-c^2}}$ findet (z.B. Bronstein, 7. Auflage, 2008, Integral Nr. 347). Mit $a = 2\pi T$, $b = (K_D\gamma - 1)^2 + 1$ und $c = 2(K_D\gamma - 1)$ folgt zunächst

$$\sqrt{b^{2} - c^{2}} = \sqrt{\frac{\left(\left(K_{\mathrm{D}}\gamma - 1\right)^{2} + 1\right)^{2} - 4\left(K_{\mathrm{D}}\gamma - 1\right)^{2}}{\left(K_{\mathrm{D}}\gamma - 1\right)^{4} + 2\left(K_{\mathrm{D}}\gamma - 1\right)^{2} + 1}}$$
$$= 1 - \left(K_{\mathrm{D}}\gamma - 1\right)^{2}$$
$$= K_{\mathrm{D}}\gamma\left(2 - K_{\mathrm{D}}\gamma\right) \quad \text{für } K_{\mathrm{D}}\gamma < 2 \quad \text{und}$$

$$b - c = \underbrace{\left(K_{\rm D}\gamma - 1\right)^{2}}_{K_{\rm D}^{2}\gamma^{2} - 2K_{\rm D}\gamma + 1} + \underbrace{1 - 2\left(K_{\rm D}\gamma - 1\right)}_{-2K_{\rm D}\gamma + 2}$$
$$= K_{\rm D}^{2}\gamma^{2} - 4K_{\rm D}\gamma + 4$$
$$= \left(2 - K_{\rm D}\gamma\right)^{2}$$

Damit ergibt sich

$$B_{\rm L} = K_{\rm D}^2 \gamma^2 \frac{2}{2\pi T K_{\rm D} \gamma (2 - K_{\rm D} \gamma)} \arctan\left(\left(\frac{2}{K_{\rm D} \gamma} - 1\right) \tan\left(\pi f T\right)\right) \Big|_{-0.5/T}^{0.5/T}.$$

Für $f = \pm 0.5/T$ divergiert $\tan(\pi fT)$ gegen $\pm \infty$. Wie oben erwähnt, wählt man γ immer so, dass $K_D \gamma \ll 1$. Dann ist der Faktor vor der Tangensfunktion positiv und die arc-tan-Funktion nimmt die Werte $\pm \pi/2$ an. Es folgt

$$\arctan\left(\left(\frac{2}{K_{\rm D}\gamma}-1\right)\tan\left(\pi fT\right)\right)\Big|_{-0.5/T}^{0.5/T}=\pi$$

Schließlich resultiert

$$B_{\rm L} = K_{\rm D}^{2} \gamma^{2} \frac{2\pi}{2\pi T K_{\rm D} \gamma \left(2 - K_{\rm D} \gamma\right)} = \frac{K_{\rm D} \gamma}{T \left(2 - K_{\rm D} \gamma\right)}$$

und es folgt unmittelbar (3-62).

4 Frequenzschätzung

Der zu schätzende Parameter ist $\lambda = v$. Die Phase wird als unbekannt mit einer Gleichverteilung zwischen 0 und 2π angenommen, da eine Phasenschätzung erst nach einer Frequenzschätzung Sinn macht. Erst nach einer genügend genauen Frequenzschätzung kann der Phasenverlauf über der Zeit auf Grund der Frequenzablage vorhergesagt werden.

Bezüglich der Symbolfolge werden 3 Fälle unterschieden:

- 1. Daten- und Takt-gestützte Schätzung,
- 2. Daten-unabhängige aber Takt-gestützte Schätzung und
- 3. Daten- und Takt-unabhängige Schätzung.

Bei Daten- und Takt-gestützter Schätzung wird angenommen, dass die Datensymbole im Beobachtungsintervall dem Empfänger vollständig bekannt sind und dass die Abtastung nach dem matched Filter zum optimalen Zeitpunkt erfolgt. Daten sind z.B. bekannt, wenn in den Datenstrom in festgelegten Zeitintervallen Trainingssequenzen eingestreut werden. In Mobilfunksystemen, die nach dem GSM-Standard arbeiten, wird z.B. in der Mitte eines jeden Zeitschlitzes eine bekannte Sequenz mit 26 binären Datensymbolen übertragen.

4.1 Daten- und Takt-gestützte Schätzung

4.1.1 Maximum-Likelihood-Ansatz

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Likelihoodfunktion aus Kapitel 3:

$$L(\tilde{\nu},\tilde{\theta}) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0} \operatorname{Re}\left\{e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] x[k]\right\}\right\}.$$
(4-1)

Darin ist h der Kanalübertragungsfaktor und

$$x[k] = \int r(t) e^{-j2\pi\tilde{v}t} g^* (t - kT - \tilde{\tau}) dt$$
(4-2)

ein Abtastwert nach dem matched Filter zum Zeitpunkt k, der von der Schätzhypothese \tilde{v} abhängt. Der Abtastzeitpunkt wird als ideal angenommen, d.h. $\tilde{\tau} = \tau$. Ferner werden die Symbole a[k] als bekannt angenommen. Da üblicher Weise die Frequenzschätzung vor der Schätzung der Phase erfolgt, kann man über $\tilde{\theta}$ keine Aussagen treffen. Der ML-Ansatz muss daher modifiziert werden, indem man den Erwartungswert über $\tilde{\theta}$ bildet, wobei eine Gleichverteilung zwischen 0 und 2π zu Grunde gelegt wird. Zur kompakteren Darstellung ersetzen wir die Summe in (4-1) durch eine einzige komplexe Variable ξ und stellen sie in Betrag und Phase dar, d.h.

$$\left|\xi(\tilde{\nu})\right|e^{j\psi(\tilde{\nu})} = \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k]x[k].$$
(4-3)

Dieser Wert hängt nur noch von der Frequenzhypothese ab. Auf der rechten Seite der Gleichung ist diese Abhängigkeit in den Abtastwerten x[k] implizit enthalten.

Nach der Multiplikation mit $e^{-j\tilde{\theta}}$ erhält man $e^{-j\tilde{\theta}}\sum_{k=1}^{L_0} a^*[k]x[k] = |\xi(\tilde{\nu})|e^{j(\psi(\tilde{\nu})-\tilde{\theta})}$. Für die Likelihoodfunktion aus (4-1) folgt

 $L(\tilde{\nu},\tilde{\theta}) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0} |\xi(\tilde{\nu})| \cos(\psi(\tilde{\nu}) - \tilde{\theta})\right\}.$ (4-4)

Um die Abhängigkeit von der Phase zu eliminieren, muss der Erwartungswert bzgl. der Phasenhypothese gebildet werden, d.h.

$$L(\tilde{\nu}) = \mathbb{E}_{\tilde{\theta}} \left[L(\tilde{\nu}, \tilde{\theta}) \right] \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{ \frac{2h}{N_0} \left| \xi(\tilde{\nu}) \right| \cos\left(\psi(\tilde{\nu}) - \tilde{\theta}\right) \right\} d\tilde{\theta} = \mathbb{I}_0 \left(\frac{2h}{N_0} \left| \xi(\tilde{\nu}) \right| \right).$$
(4-5)

Darin ist I₀(.) eine modifizierte Besselfunktion der Ordnung Null. Sie ist zusammen mit ihrem Logarithmus in Abb. 4-1 graphisch dargestellt. Zur praktischen Berechnung empfiehlt es sich, statt der Likelihoodfunktion deren Logarithmus zu verwenden. Für positive Argumente sind I₀(*x*) und lnI₀(*x*) monoton steigende Funktionen (s. Abb. 4-1). Statt der Besselfunktion bzw. ihrem Logarithmus kann man also genau so gut allein deren Argument betrachten und nach derjenigen Frequenz \tilde{v} suchen, die das Argument maximiert. Zur ML-Schätzung der Frequenzablage genügt es also, den Betrag von $\xi(\tilde{v})$ zu maximieren. Da $|\xi(\tilde{v})|$ an der gleichen Stelle maximal ist wie die Likelihoodfunktion und gleichzeitig eine Approximation von lnI₀(.) darstellt (abgesehen von dem Faktor $2h/N_0$ und der Verschiebung um –3, s. Abb. 4-1), jedoch ihr nicht gleich ist, nennt man sie Pseudo-Log-Likelihoodfunktion. Wir verwenden für die Pseudo-Log-Likelihoodfunktion die Notation log*L*'(.). Für Frequenzschätzung ist sie durch

$$\log L'(\tilde{\nu}) = \left|\xi(\tilde{\nu})\right| = \left|\sum_{k=1}^{L_0} a^*[k]x[k]\right|$$
(4-6)

mit x[k] aus (4-2) definiert.



Abb. 4-1: Modifizierte Besselfunktion $I_0(x)$ und ihr Logarithmus

Die Empfängerstruktur zur Gewinnung eines Wertes der Pseudo-Log-Likelihoodfunktion zeigt Abb. 4-2.



Abb. 4-2: Gewinnung eines Pseudo-Log-Likelihoodwertes für eine Frequenzhypothese $\tilde{\nu}$ bei unbekannter Phase

Fazit: Im Unterschied zum Fall bekannter Phase, bei dem der *Realteil* der Summe maximiert wird, muss nun also deren *Betrag* maximiert werden.



Abb. 4-3: Typische Form einer Pseudo-Log-Likelihoodfunktion zur Frequenzschätzung

Abb. 4-3 zeigt beispielhaft eine typische Pseudo-Log-Likelihoodfunktion bei hohem Signalzu-Rauschleistungsverhältnis für den Fall, dass die tatsächliche Frequenzablage v = 0 beträgt. Da der Schätzer erwartungstreu ist, liegt das absolute Maximum bei $\tilde{v} = v = 0$. Charakteristisch sind die Nullstellen bei Vielfachen von $1/L_0$ in der Nähe des Maximums. Eine anschauliche Begründung dafür wird im nächsten Abschnitt geliefert.

Leider lässt sich der optimale Schätzwert \hat{v} nicht geschlossen aus dem Empfangssignal berechnen. Da die Funktion viele Nebenmaxima besitzt, reicht das Nullsetzen der Differentiation **nicht** aus, um den optimalen Schätzwert zu bestimmen. Eine Möglichkeit besteht darin, das Empfangssignal r(t) mit mehreren komplexen Exponentialschwingungen unterschiedlicher Frequenzhypothesen zu multiplizieren und den jeweiligen Wert der Pseudo-Log-Likelihoodfunktion zu berechnen. Dies entspricht einer Abtastung im Frequenzbereich.

Dieses Vorgehen erscheint noch nicht besonders praktikabel, da die Frequenzverschiebung mit den verschiedenen Hypothesen auf das zeit- und wertkontinuierliche Empfangssignal r(t) angewendet wird und somit eine Bank aus parallelen matched Filtern und Analog/Digital-Konvertern erforderlich wäre. Für Systeme, in denen a priori bekannt ist, dass die maximale Frequenzablage kleiner ist als die halbe Symbolrate, lässt sich die ML-Schätzung zumindest näherungsweise in einen praktikablen Schätzer überführen. Diese näherungsweise ML-Schätzung sowie einige bekannte ad-hoc-Verfahren werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

4.1.2 Praktikable Frequenzschätzer

Alle praktikablen Methoden basieren auf folgenden zwei Annahmen:

1. der Modulationsgrundimpuls erfüllt die Nyquist-Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t - kT) dt = \begin{cases} E_g & \text{für } k = 0\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
 und (4-7)

2. die Frequenzablage v ist wesentlich kleiner als die Datenrate 1/T, so dass man den Frequenzkorrekturfaktor $e^{-j2\pi vt}$ für die Dauer eines Grundimpulses als konstant ansehen kann, so dass gilt

$$e^{j2\pi vt}g\left(t-kT-\tau\right)\approx e^{j2\pi vkT}g\left(t-kT-\tau\right).$$
(4-8)

Mit diesen Annahmen kann die optimale Frequenzschätzung in guter Näherung auf der Basis der Signal-angepassten Filterung des (nicht frequenzkorrigierten) Empfangssignals r(t) erfolgen. Dies wird nun am Beispiel der PSK-Modulation verifiziert. Die Datensymbole für *M*-PSK haben die Form

$$a[k] = e^{j\varphi[k]} \quad \text{mit} \quad \varphi[k] \in \{0, \ 2\pi / M, 4\pi / M, ..., 2\pi (M-1) / M\}.$$
(4-9)

Wir betrachten die Abtastwerte des nicht frequenzkorrigierten Empfangssignals im Symboltakt zu den idealen Abtastzeitpunkten nach der Signal-angepassten Filterung. Wir wollen sie mit y[k] bezeichnen. Sie sind gegeben durch

$$y[k] = \int r(t) g^*(t - kT - \tau) dt.$$
 (4-10)

Empfängersynchronisation

erhalten

$$y[k] = h \int e^{j(2\pi\nu t+\theta)} \sum_{i} a[i]g(t-iT-\tau)g^{*}(t-kT-\tau)dt + n[k]$$

$$\approx h e^{j(2\pi\nu kT+\theta)} \sum_{i} a[i] \int g(t-iT-\tau)g^{*}(t-kT-\tau)dt + n[k].$$
(4-11)

Für die Umformung haben wir von der Annahme 2 Gebrauch gemacht. n[k] bezeichnet den kten Abtastwert des Rauschsignals nach der Signal-angepassten Filterung. Ist ferner die Nyquist-Bedingung erfüllt (Annahme 1), verschwinden alle Integrale für $i \neq k$. Von allen Summentermen bleibt nur noch der Term für i = k übrig. Ist g(t) Energie-normiert (d.h. $E_g = 1$) folgt

$$y[k] \approx ha[k]e^{j(2\pi\nu kT+\theta)} + n[k].$$
(4-12)

Die Varianz der Rauschwerte ist für Energie-normierte Impulse g(t) gleich N_0/T . Da die Datensymbole als bekannt vorausgesetzt werden, können wir deren Einfluss bei M-PSK durch Multiplikation mit den konjugiert komplexen Symbolen $a^*[k]$ eliminieren. Man erhält

für M-PSK:
$$z[k] := a^*[k] y[k] \approx h e^{j(2\pi\nu kT+\theta)} + n'[k].$$
 (4-13)

Darin sind $n'[k] = a^*[k]n[k]$ Abtastwerte des Rauschsignals, die statistisch zu n[k] äquivalent sind, denn der Unterschied zwischen n'[k] und n[k] ist nur eine Phasendrehung, und eine komplexe Gauß'sche Zufallsvariable ist gegenüber Phasendrehungen invariant.

Aus (4-13) folgt als wichtige Erkenntnis:

Bei M-PSK sind die Werte z[k] Abtastwerte einer komplexen Exponentialschwingung mit konstanter Frequenz v und Phase θ , die nur noch von additivem weißen Gauß'schen Rauschen (AWGN) gestört ist.

Diese Werte enthalten den komplexen Faktor $e^{j2\pi vT}$, den wir im Interesse einer kompakteren Notation im Folgenden mit

$$z_0 := e^{j2\pi vT}$$
 bzw. $\tilde{z}_0 := e^{j2\pi \tilde{v}T}$ (4-14)

bezeichnen wollen. Der Winkel dieses Faktors entspricht der Phasendrehung innerhalb eines Symbolintervalls, die durch die Frequenzablage ν bzw. die Frequenzhypothese $\tilde{\nu}$ verursacht wird. Damit lässt sich (4-13) in der Form

$$z[k] \approx h z_0^k e^{j\theta} + n'[k]$$
(4-15)

darstellen.

Nun lässt sich die Pseudo-Log-Likelihoodfunktion für das unverrauschte Signal (n'[k] = 0)bei kleinen Frequenzablagen näherungsweise berechnen: Multipliziert man z[k] aus (4-15) noch mit dem Frequenzkorrekturfaktor $\tilde{z}_0^{-k} = e^{-j2\pi\tilde{\nu}kT}$ und summiert über L_0 Werte, erhält man eine Potenzsumme der Form $S = \sum_{k=1}^{L_0} x^k$, die kompakt durch $S = x \frac{1 - x^{L_0}}{1 - x}$ ausgedrückt werden kann. Damit lässt sich (4-6) wie folgt umformen:

$$\log L'(\tilde{\nu}) \approx h \left| e^{j\theta} \sum_{k=1}^{L_0} \left(\frac{z_0}{\tilde{z}_0} \right)^k \right| = h \left| \frac{1 - \left(z_0 / \tilde{z}_0 \right)^{L_0}}{1 - z_0 / \tilde{z}_0} \right| = h \left| \frac{e^{-j\pi L_0(\nu - \tilde{\nu})T} - e^{j\pi L_0(\nu - \tilde{\nu})T}}{e^{-j\pi (\nu - \tilde{\nu})T} - e^{j\pi (\nu - \tilde{\nu})T}} \right| \cdot \left| \frac{e^{j\pi L_0(\nu - \tilde{\nu})T}}{e^{j\pi (\nu - \tilde{\nu})T}} \right| \\ \approx h \left| \frac{\sin \left(\pi L_0 \Delta \nu T \right)}{\sin \left(\pi \Delta \nu T \right)} \right|$$
(4-16)

Dabei wurde der Hypothesenfehler $\Delta v = v - \tilde{v}$ eingeführt und die Eulerschen Beziehung sin $x = \frac{1}{2i} (e^x - e^{-x})$ verwendet.



Abb. 4-4: Graph der Funktion aus (4-16) für vT = 0 und $L_0 = 32$

Die Funktion ist in Abb. 4-4 dargestellt. In der näheren Umgebung von $\tilde{v} = v$ approximiert sie die Pseudo-Log-Likelihoodfunktion aus Abb. 4-3 sehr gut. Insbesondere liegen die Nullstellen an exakt den gleichen Stellen, nämlich bei $\tilde{v}T = vT \pm i/L_0$ für i = 1,2,3... Sie sind durch die Nullstellen der Sinusfunktion im Zähler von (4-16) gegeben, wenn der Nenner nicht gleichzeitig Null ist. Für Schätzfehler $|\Delta vT| < 0,5$ hat die Funktion große Ähnlichkeit mit dem Betrag einer si-Funktion. Tatsächlich ergibt sich (4-16) auch (abgesehen vom Skalierungsfaktor L_0), indem man unendlich viele um ganzzahlige Vielfache von 1/T gegeneinander verschobene Funktionen der Form $\sin(x)/x$ mit $x = \pi \Delta vT$ überlagert.

Die Lage der Nullstellen kann auch anschaulich erklärt werden: Für $\Delta vT = i/L_0$ durchläuft die komplexe Exponentialschwingung aus (4-13) eine ganze Anzahl von vollen Perioden innerhalb des Beobachtungsintervalls. Die Summation von Abtastwerten über eine ganze Anzahl von Perioden einer Sinus- bzw. Cosinusschwingung ergibt aber immer Null, sofern die Abtastrate ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz der Exponentialschwingung ist, was hier zutrifft.

Die Näherung nach (4-16) ist eine periodische Funktion, die weitere Maxima der Höhe L_0 bei $\Delta vT = \pm 1$ hat. Wieso ist dies in Abb. 4-3 nicht zu erkennen? - Bei derart großen Frequenzablagen ist die Annahme 3 verletzt und die Näherung gilt nicht mehr. Mit zunehmender Frequenzverschiebung wird die Signalleistung nach dem matched Filter immer kleiner. Daher

sind die relativen Maxima der exakten Log-Likelihoodfunktion bei $|\Delta vT| = 1$ deutlich kleiner als bei $\Delta vT = 0$ und verschwinden vollständig, wenn die Frequenzverschiebung vT größer als die Bandbreite des matched Filters ist. Bei Wurzel-Cosinus-Impulsen ist dies der Fall, wenn der normierte Frequenzversatz ΔvT größer als $1+\alpha$ ist.

Erweitert man die Herleitung von (4-16) um das Rauschen ergibt sich

$$\log L'(\Delta \nu) \approx \left| h \frac{\sin(\pi L_0 \Delta \nu T)}{\sin(\pi \Delta \nu T)} + N'' \right|.$$
(4-17)

Darin beschreibt N'' eine Gauß'sche Zufallsvariable mit der Varianz L_0N_0/T . Der Faktor L_0 resultiert aus der Summation über L_0 unkorrelierte Rauschwerte.

Aus der theoretischen Herleitung im vorhergehenden Abschnitt wird klar, dass die für PSK beschriebene Vorgehensweise auch für andere Modulationsverfahren (z. B. QAM) optimal ist, denn bei der Herleitung des ML-Empfängers haben wir keinerlei Einschränkungen bzgl. des Modulationsalphabets gemacht. Intuitiv mag man zwar meinen, nur eine Division von y[k] durch a[k] eliminiert den Einfluss der Datensymbole vollständig. Das trifft für den Nutzanteil von y[k] auch zu, jedoch würde der Rauschanteil von Symbolen mit kleinen Amplituden gegenüber solchen mit großen Amplituden erheblich angehoben und würde eine nachfolgende Mittelung negativ beeinflussen. Gerade die Multiplikation mit den konjugiert komplexen Datensymbolen führt aber zur Maximierung des Signal-zu-Rauschleistungsverhältnisses im Log-Likelihoodwert an der Stelle $\tilde{v} = v$.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass sich alle praktikablen Methoden zur Datengestützten Frequenzschätzung auf die Schätzung der Frequenz einer komplexen Exponentialschwingung mit additiven weißen Gauß'schen Rauschen zurückführen lassen. Die Werte z[k]nach (4-13) bzw. (4-15) bilden die Basis dieser im Folgenden beschriebenen Frequenzschätzer.

Zur Beurteilung der Qualität verschiedener praktikabler Schätzverfahren soll die modifizierte Cramer-Rao-Schranke herangezogen werden. Sie ist für Frequenzschätzung gegeben durch

$$E\left[\left(\nu T - \hat{\nu}T\right)^{2}\right] \ge \frac{3}{2\pi^{2}} \frac{1}{L_{0}^{3} E_{S}/N_{0}}.$$
(4-18)

Eine ausführliche Herleitung ist im Anhang D zu finden.

4.1.2.1 Näherungsweise ML-Schätzung

Wegen der 2. Annahme ($|v| \ll 1/T$) kann der Phasenfaktor mit der Frequenzhypothese \tilde{v} in Abb. 4-2 in der Verarbeitungskette also weiter nach hinten verlegt werden. Unter anderem ergibt sich daraus der Vorteil, dass nun nur noch Abtastwerte im Symboltakt als Schätzbasis dienen. Damit kann die gesamte Frequenzschätzung allein mit digitaler Signalverarbeitung realisiert werden.

Der zu maximierende Ausdruck (4-6) kann nun angenähert werden durch

$$\left| \xi\left(\tilde{\nu}\right) \right| \approx \left| \sum_{k=1}^{L_0} e^{-j2\pi\tilde{\nu}kT} z[k] \right|$$
$$\approx \left| \sum_{k=1}^{L_0} z_0^{-k} z[k] \right| \qquad (4-19)$$

Wie bei idealer ML-Schätzung ist auch hier eine geschlossene Auflösung nach $\tilde{\nu}$ nicht möglich, jedoch kann die Berechnung für äquidistante Stützwerte nun effizient durchgeführt werden. Der Summenausdruck in (4-19) stellt für äquidistante diskrete Werte $\tilde{\nu}$ nämlich nichts anderes dar als die diskrete Fourier-Transformation (DFT) der Werte z[k]. Sofern L_0 keine Potenz von 2 ist, ergänzt man die L_0 Werte um entsprechend viele Nullen, so dass sich der Algorithmus der schnellen Fourier-Transformation (FFT) anwenden lässt. Die maximale Frequenzablage ν , die mit diesem Verfahren noch geschätzt werden kann, ist prinzipiell durch die Abtastrate von 1/T auf das Intervall [-0,5/T, +0,5/T] beschränkt.

Es ist zweckmäßig, zweistufig vorzugehen, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten:

- 1. Grobschätzung: Man berechnet die DFT für N Punkte und sucht die Stelle des Maximums heraus. Hierbei sollte $N \ge 2L_0$ gewählt werden. Dies stellt sicher, dass in dem Bereich zwischen den beiden Nullstellen neben dem Maximum der Pseudo-Log-Likelihoodfunktion mindestens 3 Abtastwerte liegen. Entsprechend muss ein Block von $N-L_0$ Nullen eingefügt werden. An welcher Stelle der Block eingefügt werden ist gleichgültig, denn eine zyklische Verschiebung der DFT-Eingangswerte hat keinen Einfluss auf den Betrag der DFT-Ausgangswerte.
- 2. In der n\u00e4heren Umgebung des Maximums berechnet man die St\u00fctzstellen in einem wesentlich dichteren Abstand oder man interpoliert. In der Regel reicht es aus, aus der Grobsch\u00e4tzung den Abtastwert mit der maximalen Amplitude zu ermitteln. Man legt ein Polynom zweiten Grades durch diesen Wert sowie die beiden Nachbarwerte. Die theoretische Grundlage f\u00fcr diese Approximation liefert die Reihenentwicklung von (4-16), deren erste zwei Glieder eben genau ein solches Polynom darstellen. Der Abszissenwert des Maximums dieses Polynoms ist die Basis f\u00fcr eine gute N\u00e4herung des ML-Sch\u00e4tzwertes der Frequenz. Dieser Wert kann geschlossen als Funktion der drei Abtastwerte dargestellt werden.

Polynominterpolation: Die Aufgabe besteht darin, den Parameter \hat{x} der Funktion

$$y(x) = y_{\text{max}} - c \cdot (x - \hat{x})^2$$
 (4-20)

zu bestimmen, wobei die Abtastwerte ganzzahligen *x*-Werten entsprechen. Gegeben sind die 3 Werte y(-1), y(0) und y(1), von denen y(0) das Maximum darstellt. Daraus lassen sich 3 Gleichungen bilden, aus denen die 3 Unbekannten bestimmt werden können:

$$y(-1) = y_{\text{max}} - c \cdot (1 + \hat{x})^2$$
, $y(0) = y_{\text{max}} - c \cdot \hat{x}^2$ und $y(1) = y_{\text{max}} - c \cdot (1 - \hat{x})^2$.

Zunächst wird y_{max} eliminiert:

$$y(0) - y(-1) = c \cdot (1 + \hat{x})^2 - c \cdot \hat{x}^2, \ y(0) - y(1) = c \cdot (1 - \hat{x})^2 - c \cdot \hat{x}^2.$$

Division der ersten Gleichung durch die zweite eliminiert c:

Abb. 4-5: Interpolation zwischen 3 Stützstellen durch ein Polynom 2. Grades

Nachdem y(0) das Maximum von den drei Abtastwerten y(-1), y(0) und y(+1) ist, muss \hat{x} zwischen -0,5 und +0,5 liegen. Der Frequenzschätzwert ergibt sich aus

x

$$\hat{v}T = \tilde{v}_0 T + \frac{\hat{x}}{N} \,. \tag{4-22}$$

Darin ist \tilde{v}_0 die zum Maximalwert y(0) gehörende Frequenzhypothese und N die DFT-Länge.

Die Struktur des ML-Schätzers zeigt Abb. 4-6.

-1



Abb. 4-6: Struktur des Daten- und Takt-gestützten ML-Frequenzschätzers

Damit haben wir aus der Theorie einen praktikablen Vorwärtsschätzer hergeleitet.
Leistungsanalyse des ML-Schätzers

Als Kriterien zur Bewertung eines jeden Frequenzschätzers dienen

- der mittlere quadratische Schätzfehler $E\left[\left(\nu T \hat{\nu}T\right)^2\right]$ bzw. die Wurzel daraus sowie
- der Mittelwert $E[\hat{v}T]$, der eine Aussage über die Erwartungstreue liefert.

Beide sind von verschiedenen Parametern abhängig. Wir wollen hier beispielhaft ein lineares Modulationsverfahren mit einem Wurzel-Cosinus-Impuls mit Roll-Off-Faktor $\alpha = 0,25$ und einer Trainingssequenz der Länge $L_0 = 32$ zu Grunde legen. Es interessiert die Abhängigkeit der genannten Bewertungskriterien von dem Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis und dem Frequenzversatz v zwischen den Oszillatoren des Senders und des Empfängers. Als Maß für das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis verwenden wir das Verhältnis E_S/N_0 von der Empfangsenergie E_S pro Symbol und der Rauschleistungsdichte N_0 am Empfängereingang. In den Abbildungen Abb. 4-7 und Abb. 4-8 sind für den ML-Schätzer beide oben genannten Kriterien über dem E_S/N_0 und über dem normierten Frequenzversatz vT dargestellt. Hierbei handelt es sich um Ergebnisse aus Simulationen mit 10.000 verschiedenen Trainingssequenzen und ebenso vielen verschiedenen Realisierungen des Rauschprozesses.

Aus den Ergebnissen lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für den näherungsweisen ML-Schätzer ziehen:

- Er ist im nutzbaren Bereich erwartungstreu für $10 \lg E_S/N_0 \ge 1 \operatorname{dB}$ (Abb. 4-8),
- Für vT = 0 und $E_S/N_0 > 0$ dB liegt er auf der Cramer-Rao-Schranke (Abb. 4-7 links)
- Mit zunehmender Frequenzablage wird der Abstand zur Cramer-Rao-Schranke größer auch für größere E_S/N_0 (Begründung s.u.)
- Relativ großer Schätzbereich: Theoretisch: $|\nu T| < 0.5$.

Nutzbarer Bereich: $|vT| \le 0, 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{L_0}\right).$

Der nutzbare Bereich resultiert aus der Überlegung, dass die Hauptkeule (der Bereich zwischen den beiden Nullstellen rechts und links des Maximums der Pseudo-Log-Likelihoodfunktion) vollständig innerhalb des Intervalls $[-0,5 \le vT < 0,5)$ liegen muss.



Abb. 4-7: Näherungsweise ML-Schätzung: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-8: Näherungsweise ML-Schätzung: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT

Wir wollen nun den mittleren Schätzfehler (Abb. 4-7) näher analysieren.

• Für $E_S/N_0 < 1$ (0 dB) steigt der Fehler mit abnehmenden E_S/N_0 deutlich stärker an als die Cramer-Rao-Schranke. Ursache dafür ist, dass durch das Rauschen relativ häufig ein Maximum außerhalb des Bereichs der Hauptkeule der unverrauschten Pseudo-Log-Likelihoodfunktion vorgetäuscht wird. Diese Wahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmenden E_S/N_0 zu, wobei zunächst überwiegend die nächstgelegenen Nebenmaxima durch Rauschen zum Maximum angehoben werden. Mit abnehmenden E_S/N_0 werden immer häufiger auch Maxima an weiter abgelegenen Positionen vorgetäuscht. Im Extremfall, wenn nur noch Rauschen vorliegt, also $E_S/N_0 = 0$ (- ∞ dB) ist, ist die Position des Maximums gleichverteilt im Intervall $-0.5 < vT \le 0.5$. Der mittlere quadratischen Fehler ist dann 1/12. Die Kurven in Abb. 4-7 links konvergieren also gegen $1/\sqrt{12} \approx 0.29$ für $E_S/N_0 \rightarrow 0$.

- Für vT > 0,1 steigt der Schätzfehler geringfügig, aber kontinuierlich an. Dieses Verhalten wird an der Kurve für $E_S/N_0 = 10$ dB aus Abb. 4-7 rechts besonders deutlich. Bei 10 dB liegt das detektierte Maximum zwar zuverlässig im Bereich der Hauptkeule der unverrauschten Likelihoodfunktion, dennoch gibt es eine Degradation. Ursache ist die zunehmende Verletzung der Annahme 2, dass nämlich $vT \ll 1$ gilt. Dies hat zwei Effekte zur Folge:
 - Verringerung der Nutzleistung: Da das frequenzverschobene Empfangssignal ohne Korrektur auf das matched Filter gegeben wird, wird zwangsläufig die Nutzleistung an dessen Ausgang mit zunehmender Frequenzabweichung geringer. Die Rauschleistung wird dagegen nicht vom Frequenzversatz beeinflusst. Für einen Roll-Off-Faktor von $\alpha = 0$ (rechteckförmige Übertragungsfunktion) nimmt die mittlere Nutzleistung linear mit der Frequenzverschiebung ab und erreicht bei vT = 0,5 einen Verlust von 3 dB.
 - Intersymbolinterferenz (ISI): Die Kreuzkorrelationsfunktion eines mit $e^{j2\pi v}$ multiplizierten Modulationsimpulses mit dem ursprünglichen Modulationsimpuls erfüllt nicht mehr die Nyquist-Bedingung, so dass ISI entsteht. Die mittlere ISI-Leistung nimmt mit wachsendem Frequenzversatz zu. Die Auswirkung von ISI auf den mittleren Schätzfehler wird an Hand der Kurve für 100 dB in Abb. 4-7 rechts deutlich. Bei 100 dB kann das Rauschen als vernachlässigbar eingestuft werden, so dass als Störquelle nur noch ISI zum Tragen kommt. Bei vT = 0,4 wird durch ISI bereits ein mittlerer Fehler von 5·10⁻⁴ verursacht. Dies ist ein Wert, der auch bei $E_S/N_0 \approx 12$ dB erreicht wird, wenn die einzige Störquelle das Rauschen ist.

Die ISI ist es auch, die die Kurven für $\nu T > 0,1$ aus Abb. 4-7 links für große E_S/N_0 ausflachen lässt.

Beide Effekte – ISI und verringerte Nutzleistung – sind auch der Grund, warum im linken Bild von Abb. 4-7 sich der Ablösepunkt von der Cramer-Rao-Schranke mit zunehmenden Frequenzversatz zu höherem E_S/N_0 hin verschiebt. Für vT = 0,4 führt dies zu einem Verlust von ca. 5 dB.

4.1.2.2 Lineare Mittelung der Phasendifferenzen aufeinander folgender Abtastwerte

Ein sehr einfacher ad-hoc Ansatz zur Frequenzschätzung besteht darin, die Phasendifferenzen zweier aufeinander folgender Werte z[k-1] und z[k] zu mitteln. Die Phasendifferenz kann durch die Multiplikation eines Wertes mit dem konjugiert komplexen vorhergehenden Wert berechnet werden. Aus (4-13) folgt: $z[k]z^*[k-1] \approx h^2 e^{j2\pi vT} + n''[k]$. Bei genügend kleinem Rauschen kann die Frequenz bereits aus einer einzigen Phasendifferenz ermittelt werden. Die Summation über mehrere Phasendifferenzen dient nur noch zur Rauschunterdrückung. Für die Mittelung stehen L_0 -1 Phasendifferenzen zur Verfügung. Es folgt als Schätzwert:

4 Frequenzschätzung

$$\hat{v}T = \frac{1}{2\pi (L_0 - 1)} \sum_{k=2}^{L_0} \arg(z[k] z^* [k-1])$$
(4-23)

Leistungsanalyse der Phasendifferenzmittelung

Ergebnisse aus Simulationen sind in Abb. 4-9 und Abb. 4-10 dargestellt.



Abb. 4-9: Mittelung der Phasendifferenzen: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-10: Mittelung der Phasendifferenzen: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT

Es lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für die Phasendifferenzmittelung ziehen:

- Sie ist innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs erwartungstreu (Abb. 4-10 rechts),
- sie erreicht nicht die Cramer-Rao-Schranke (Abb. 4-9 links). Eine nähere Rauschanalye offenbart einen um den Faktor $L_0/6$ höheren mittleren quadratischen Fehler für große E_S/N_0 (s. Anhang G).
- Mit zunehmender Frequenzablage wird der Abstand zur Cramer-Rao-Schranke größer auch für größere E_S/N_0 . (Gleiche Ursache wie beim ML-Schätzer: Reduktion der Nutzleistung und ISI)

•	Schätzbereich:	Theoretisch:	$ \nu T < 0.5$ (folgt aus $ arg(.) < \pi$)
		Nutzbar:	$ \nu T \le 0,25$ (folgt aus Abb. 4-9 rechts, Kurve für 100 dB, Anmerkung s.u.)

Der nutzbare Schätzbereich gilt für $\alpha = 0,25$. Tendenziell wird er mit zunehmendem α größer.

Für kleinere E_S/N₀ steigt der Schätzfehler überproportional an (Abb. 4-9 links). Der Grund dafür ist, dass durch Rauschen Phasendifferenzen auftreten können, die betragsmäßig größer als π sind, aber mittels der modulo-2π-Operation auf das Intervall (-π,π] abgebildet werden. Statt einer positiven Phasendifferenz größer als π wird also ein negativer Wert ermittelt. Dieser verfälscht den Schätzwert erheblich. Je kleiner das E_S/N₀ ist, desto häufiger treten derartige "Phasensprünge" auf und der mittlere quadratische Fehler hebt sich immer mehr von der Cramer-Rao-Schranke ab. Für E_S/N₀ → 0 konvergiert der mittlere quadratische Schätzfehler gegen 1/√12(L₀-1). Dies folgt aus der Annahme einer Gleichverteilung der Phasendifferenzen zwischen -π und +π und der Annahme statistisch unabhängiger Phasendifferenzen in der Summe von (4-23).

Die Kurve für 100 dB in Abb. 4-9 liegt im Vergleich zur entsprechenden Kurve für ML-Schätzung aus Abb. 4-7 deutlich höher. ISI und verminderte Nutzleistung wirken sich hier offenbar wesentlich stärker aus als beim ML-Schätzer. Darüber hinaus gibt es für vT > 0.25einen extrem steilen Anstieg des mittleren Fehlers, der den nutzbaren Schätzbereich auf etwa 0.25 beschränkt.

4.1.2.3 Schätzer nach Kay: Lineare Regression der Phasenwerte

Eine andere ad-hoc Idee stammt von Kay. Sie basiert auf der Beobachtung, dass für kleine Rauschamplituden das Phasenrauschen von z[k] näherungsweise Gauss-verteilt ist. Für Gaussverteilte Werte, die außerdem statistisch unabhängig voneinander sind, führt aber die Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers zur ML-Schätzung. Da wir von einer konstanten Frequenzablage innerhalb des Beobachtungsintervalls ausgehen, hängt der Phasenverlauf des ungestörten Signals linear von k ab. Wir können daher ansetzen: $\tilde{\varphi} = ak + b$ mit $a = 2\pi\tilde{v}T$. Für den optimalen Schätzwert \hat{v} sind die Koeffizienten a und b nun so zu bestimmen, dass der mittlere quadratische Fehler zu den Phasenwerten von z[k] minimiert wird:

$$\sum_{k=1}^{L_0} \left(ak + b - \arg(z[k]) \right)^2 = \min!$$
 (4-24)

Abb. 4-11 veranschaulicht den Ansatz. Hier ist allerdings eine Besonderheit bzgl. der Phasenwerte zu berücksichtigen: Wegen der Mehrdeutigkeit modulo 2π werden die Phasenwerte normaler Weise auf den Wertebereich $(-\pi, +\pi]$ abgebildet. In (4-24) ist jedoch dafür zu sorgen, dass die Phasendifferenzen aufeinander folgender Werte nicht "springen". In Abb. 4-11 springt der Phasenwert z.B. beim Übergang vom 13. auf den 14. Wert um mehr als π . Die Phasenwerte müssen so korrigiert werden, dass die Phasendifferenzen kleiner als π sind. Diesen Prozess nennt man auf Englisch Phase-Unwrapping.



Abb. 4-11: Lineare Regression der Phasenwerte mit Phase-Unwrapping

Notwendig und hinreichend für das Minimum des quadratischen Fehlers ist das Nullsetzen der partiellen Differentiation von (4-24) nach *a* und *b*. Dies liefert zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten, aus denen *b* eliminiert werden kann. Die Auflösung nach *a* bzw. \hat{v} liefert schließlich als Schätzwert

$$\hat{\nu}T = \frac{6}{2\pi L_0 \left(L_0^2 - 1\right)} \sum_{k=1}^{L_0} \left(2k - L_0 - 1\right) \arg\left(z[k]\right).$$
(4-25)

Daraus lässt sich eine Formel herleiten, in der nur noch die Phasendifferenzen aufeinander folgender Abtastwerte vorkommen:

$$\hat{v}T = \frac{6}{2\pi L_0 \left(L_0^2 - 1\right)} \sum_{k=1}^{L_0 - 1} k \left(L_0 - k\right) \arg\left(z[k+1]z^*[k]\right).$$
(4-26)

Auf die längliche Herleitung sei hier verzichtet. Der große Vorteil dieser Darstellung ist, dass das Phase-Unwrapping nicht mehr erforderlich ist. Im Vergleich zur einfachen Mittelung der Phasendifferenzen nach (4-23) fällt auf, dass hier noch ein Gewichtungsfaktor vor den Phasendifferenzen steht. Dieser Faktor ist in der Mitte des Beobachtungsintervalls am größten und fällt zu den Rändern hin quadratisch ab.

Leistungsanalyse des Schätzers nach Kay:

Ergebnisse aus Simulationen sind in Abb. 4-12 und Abb. 4-13 dargestellt.



Abb. 4-12: Schätzer nach Kay: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-13: Schätzer nach Kay: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT

Es lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für den Kay-Schätzer ziehen:

- Er ist für hohe SNR innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs erwartungstreu (Abb. 4-13 rechts).
- Für vT = 0 und $E_S/N_0 > 10$ dB liegt er auf der Cramer-Rao-Schranke (Abb. 4-12 links)

- Mit zunehmender Frequenzablage wird der Abstand zur Cramer-Rao-Schranke größer auch für größere E_S/N_0 (Begründung wie beim ML-Schätzer: Reduktion der Nutzleistung und ISI)
- Schätzbereich: Theoretisch: $|\nu T| < 0.5$ (folgt aus $|arg(.)| < \pi$)

Nutzbar:

 $|vT| \le 0,23$ (folgt aus Abb. 4-12 rechts, Kurve für 100 dB, Anmerkung s.u.)

Diese Grenzen gelten nur für $\alpha = 0,25$. Tendenziell wird der nutzbare Bereich mit zunehmenden α größer.

• Für kleinere SNR hat der Schätzer den gleichen Nachteil wie die Phasendifferenzmittelung: Für kleinere E_S/N_0 steigt der Schätzfehler überproportional an (Abb. 4-12 links)

Die Kurven für 100 dB aus Abb. 4-12 und Abb. 4-7 sind für $vT \le 0,25$ nahezu gleich. Offenbar ist der Kay-Schätzer gegenüber ISI und verminderter Nutzleistung genau so robust wie der ML-Schätzer. Allerdings hat der Kay-Schätzer den gleichen Nachteil wie die Phasendifferenzmittelung: Für vT > 0,23 weist die Kurve für 100 dB einen extrem steilen Anstieg des mittleren Fehlers auf, der den nutzbaren Schätzbereich einschränkt. Dies scheint ein generelles Problem aller Schätzer zu sein, die allein auf Phasendifferenzen basieren.

Im Vergleich zur ungewichteten Mittelung von Phasendifferenzen aufeinander folgender Abtastwerte hat der Kay-Schätzer den gleichen nutzbaren Schätzbereich aber eine wesentlich geringeren mittleren quadratischen Fehler. Die geringfügig erhöhte Komplexität durch die Gewichtung der Phasendifferenzen dürfte bei den heute verfügbaren Technologien keinen relevanten Nachteil darstellen, so dass der Kay-Schätzer eindeutig der einfachen Phasendifferenzmittelung vorzuziehen ist.

4.1.2.4 Schätzer nach Fitz

Die beiden zuletzt behandelten Schätzverfahren haben den Nachteil, dass die Schätzfehler zu kleinen Signal-Rauschverhältnissen auf Grund von Phasensprüngen stark ansteigen. Fitz hat nun einen Ansatz vorgeschlagen, der in diesem Bereich die Situation erheblich verbessert.

Er beruht im Wesentlichen auf dem Ansatz, zunächst die Summe über die L_0 -1 komplexen Produkte $z[k+1]z^*[k]$ zu bilden und danach erst die Phase zu berechnen. Der Vorteil liegt darin, dass vor der Winkelbildung das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis durch die Summation erheblich verbessert wird, so dass Fehler auf Grund von modulo- 2π -Abbildungen erst bei wesentlich kleineren E_S/N_0 auftreten. Allerdings darf man hier nicht die übliche Faustformel "SNR nach der Summation ist gleich der Summe der SNR der Summenelemente" anwenden. Diese gilt nur für statistisch unabhängige Rauschwerte. In diesem Fall sind die Rauschwerte verschiedener Summenelemente voneinander abhängig, und nur eine genaue Rauschanalyse, wie sie im Anhang G durchgeführt wird, offenbart den korrekten Zusammenhang. Dabei stellt sich heraus, dass die Standardabweichung des Schätzfehlers für große E_S/N_0 gegen den Schätzfehler für einfache Phasendifferenzmittelung konvergiert und für mittlere E_S/N_0 sogar größer ist, also einen deutlichen Abstand von der CRB hat (siehe Abb. 4-9).

Fitz fand nun heraus, dass man näher an die CRB herankommt, wenn man nicht nur die Produkte direkt aufeinander folgender Abtastwerte $z^*[k]$ und z[k+1] betrachtet, sondern auch Produkte weiter auseinander liegender Werte in die Schätzung einbezieht. Haben die Werte den Abstand κ , ist im unverrauschten Fall die Schätzhypothese aus einem einzigen Paar gegeben durch $\tilde{\nu}T = \arg(z[k+\kappa]z^*[k])/(2\pi\kappa)$. Die Division durch κ bewirkt, dass die Rauschamplituden um genau diesen Faktor verringert werden. Nachteilig ist, dass dann der Schätzbereich für die Frequenzablage um denselben Faktor eingeschränkt wird. Wenn man eine Rauschanalyse der Summe über die $L_0 - \kappa$ möglichen Produkte durchführt, stellt sich außerdem heraus, dass allein diese Maßnahme auch noch nicht die gewünschte Verbesserung bewirkt. Erst eine Mittelwertbildung der Schätzwerte für verschiedene κ bringt die Schätzung der CRB näher.

Der Schätzer nach Fitz basiert auf Werten

$$R[\kappa] = \frac{1}{L_0 - \kappa} \sum_{k=1}^{L_0 - \kappa} z[k + \kappa] z^*[k].$$
(4-27)

Mit (4-13) ergibt sich

$$R[\kappa] = h^2 e^{j2\pi\kappa vT} + n''[\kappa].$$
(4-28)

Darin sind $n''[\kappa]$ Musterwerte einer mittelwertfreien Zufallsvariable, die in guter Näherung wieder Gauß-verteilt ist. Unter Vernachlässigung des Rauschens gilt offensichtlich:

$$\arg\{R[\kappa]\} = 2\pi\kappa\nu T \tag{4-29}$$

Fitz schlägt nun vor, über eine Anzahl von $N \le L_0/2$ Phasenwerten zu summieren. Dies ergibt (ohne Rauschen):

$$\sum_{\kappa=1}^{N} \arg\left\{R\left[\kappa\right]\right\} = \sum_{\kappa=1}^{N} 2\pi\kappa vT = \pi N \left(N+1\right) vT .$$
(4-30)

Daraus lässt sich ein Schätzwert für die Frequenz unmittelbar angeben:

$$\hat{v}T = \frac{1}{\pi N \left(N+1\right)} \sum_{\kappa=1}^{N} \arg\left\{R[\kappa]\right\}.$$
(4-31)

Fitz konnte schließlich zeigen, dass die CRB für $N = L_0/2$ asymptotisch erreicht wird.

Leistungsanalyse des Schätzers nach Fitz:

Ergebnisse aus Simulationen für $N = L_0/2$ sind in Abb. 4-14 und Abb. 4-15 dargestellt. Es lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für den Fitz-Schätzer ziehen:

- Er ist innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs auch für niedriges $E_{\rm S}/N_0$ erwartungstreu (Abb. 4-15 rechts).
- Für $N = L_0/2$, vT = 0 und $E_S/N_0 > 0$ dB liegt er auf der Cramer-Rao-Schranke (Abb. 4-14 links)
- Innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs ist kaum eine Degradation festzustellen (Abb. 4-14 rechts).
- Schätzbereich: Theoretisch: $|vT| < \frac{1}{2N}$ (folgt aus $|arg(.)| < \pi$ für $\kappa = N$ in (4-30))

Nutzbar:
$$|\nu T| \le \frac{0.9}{2N}$$
 (folgt aus Abb. 4-14 rechts)

Der Schätzbereich ist nahezu unabhängig von α .



Abb. 4-14: Schätzer nach Fitz: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-15: Schätzer nach Fitz: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT

4.1.2.5 Schätzer nach Luise und Reggiannini

Luise und Reggiannini verfolgen einen ähnlichen ad hoc Ansatz wie Fitz, jedoch schlagen sie vor, im zweiten Schritt zunächst über $R[\kappa]$ zu summieren und dann erst den Winkel zu ermit-

$$\sum_{\kappa=1}^{N} R[\kappa] \approx \sum_{\kappa=1}^{N} e^{j2\pi\kappa vT}$$
(4-32)

Die rechte Summe lässt sich geschlossen ausdrücken durch

$$\sum_{\kappa=1}^{N} e^{j2\pi\kappa\nu T} = \frac{\sin(\pi N\nu T)}{\sin(\pi\nu T)} e^{j\pi(N+1)\nu T}$$
(4-33)

Für kleine Frequenzablagen v ist der Faktor vor der e-Funktion positiv und es folgt die Schätzregel

$$\hat{v}T = \frac{1}{\pi (N+1)} \arg\left\{\sum_{\kappa=1}^{N} R[\kappa]\right\}.$$
(4-34)

Leistungsanalyse des Schätzers nach Luise und Reggiannini:

Ergebnisse aus Simulationen für $N = L_0/2$ sind in Abb. 4-14 und Abb. 4-15 dargestellt. Es lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für den Fitz-Schätzer ziehen:

- Er ist innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs auch für niedriges $E_{\rm S}/N_0$ erwartungstreu (Abb. 4-17 rechts).
- Für $N = L_0/2$, vT = 0 und $E_S/N_0 > 0$ dB liegt er auf der Cramer-Rao-Schranke (Abb. 4-14 links)
- Innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs ist eine geringe Degradation mit wachsendem vT festzustellen.

• Schätzbereich: Theoretisch:
$$|vT| < \frac{1}{N+1}$$
 (folgt aus $|arg(.)| < \pi \text{ in } (4-34)$)

Nutzbar:
$$|vT| \le \frac{0.85}{N+1}$$
 (folgt aus Abb. 4-16 rechts)

Der Schätzbereich ist nahezu unabhängig von α .

Damit ist der Schätzbereich fast doppelt so groß wie beim Fitz-Algorithmus.

Im Vergleich zum Fitz-Schätzer hat der Schätzer von L&R hat keinerlei Nachteile sondern nur Vorteile: Insbesondere der deutlich erweiterte Schätzbereich macht ihn attraktiv. Darüber hinaus erweist es sich als Implementierungsvorteil, dass die Phasenberechnung aus Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl nur einmal erfolgt, beim Fitz-Schätzer dagegen *N* mal. Daher ist der L&R-Schätzer dem Fitz-Schätzer klar vorzuziehen.



Abb. 4-16: Schätzer nach Luise und Reggiannini: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-17: Schätzer nach Luise und Reggiannini: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT

Bei der bisherigen Leistungsanalyse wurde die Anzahl *N* der Elemente, über die die äußere Summe gebildet wird, gleich $L_0/2$ gesetzt, denn nur für diesen Wert ist der Schätzer optimal. Man kann jedoch auch kleinere *N* verwenden, um den nutzbaren Schätzbereich zu vergrößern, wenn man einen gewissen Abstand zur Cramer-Rao-Schranke toleriert. Mit kleinerem *N* wird der Abstand allerdings größer und erreicht für N = 2 etwa den Abstand, den die Phasendifferenzmittelung hat. Für sehr kleine Werte $N(N \le 4)$ erweist es sich als vorteilhaft, die Werte z[k]vorher auf die Amplitude 1 zu normieren, d.h. in (4-27) die Werte z[k] durch z[k]/|z[k]| zu



ersetzen. Damit wird der Einfluss des Rauschens im Realteil eliminiert, was sich insbesondere im Bereich 0...10 dB in einer deutlichen Verbesserung bemerkbar macht.

Abb. 4-18: Modifizierter L&R mit N=2 im Vergleich zum Kay-Schätzer: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT



Abb. 4-19: Modifizierter L&R-Schätzer mit N=2 im Vergleich zum Kay-Schätzer: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT

Abb. 4-18 und Abb. 4-19 vermitteln einen Eindruck von der Leistungsfähigkeit des so modifizierten L&R-Schätzers für N = 2. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kurven für die Phasendifferenzmittelung als punktierte Linien mit eingezeichnet. Er ist der Phasendifferenzmittelung in jeder Hinsicht überlegen, im Vergleich zum Kay-Schätzer allerdings nur für niedrige E_S/N_0 und – was von besonderem Interesse ist – für größere Frequenzablagen, insbesondere, was die Erwartungstreue betrifft. Ob eine L&R-Variante mit $N < L_0/2$ einem Kay-Schätzer vorzuziehen ist, ist von Fall zu Fall abzuwägen. Wenn der Signalverarbeitungsaufwand keine Rolle spielt, ist ohnehin der ML-Schätzer allen anderen vorzuziehen.

Auswirkung von nicht optimalen Abtastzeitpunkten auf die Schätzgenauigkeit

Bisher haben wir optimale Abtastzeitpunkte vorausgesetzt. Dies ist jedoch eine unrealistische Annahme. Tatsächlich wird man immer eine mehr oder weniger große Abweichung vom idealen Abtastzeitpunkt haben. Um einen Eindruck davon zu gewinnen, wie sich derartige Fehler auf die Frequenzschätzung auswirken, zeigen Abb. 4-20 und Abb. 4-21 Ergebnisse von Simulationen mit zufällig ausgewählten Trainingssequenzen und statischen Abtastzeitfehlern. Als Maß für den Abtastzeitfehler dient die Größe

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{\hat{\tau} - \tau}{T} \,. \tag{4-35}$$

Darin ist τ die Kanalverzögerung, $\hat{\tau}$ deren Schätzwert und *T* die Symboldauer. τ und $\hat{\tau}$ werden für die Dauer der Trainingssequenz als konstant angenommen. Mit zunehmendem Fehler nimmt die ISI-Leistung zu und die Nutzleistung ab, so dass zu erwarten ist, dass sich dies in Form einer Erhöhung der Schätzfehlervarianz auswirkt. Dies ist insbesondere bei niedrigen $E_{\rm S}/N_0$ offensichtlich. Aus Abb. 4-20 ist zu erkennen, dass die Standardabweichung des Schätzfehlers für große $E_{\rm S}/N_0$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert. Für vT = 0 ist dieser Grenzwert allein durch das Verhältnis von Nutz- zu ISI-Leistung bestimmt. Zum Beispiel errechnet man für $\alpha = 0,25$ und $\varepsilon_{\tau} = 0,25$ mit den Formeln aus Anhang A $10lgP_{\rm S}/P_{\rm ISI} \approx 7,8$ dB. Unter der Annahme, dass die ISI-Werte Gauß-verteilt sind, ergäbe sich die gleiche Fehlervarianz wie für ein $E_{\rm S}/N_0$ von 7,8 dB. Tatsächlich ist die Fehlervarianz, die man Abb. 4-20 für $10lgE_{\rm S}/N_0 = 7,8$ dB für $\varepsilon_{\tau} = 0$ entnehmen kann, etwas niedriger als der asymptotische Grenzwert für $\varepsilon_{\tau} = 0,25$, was darauf schließen lässt, dass die Gauß-Annahme für die ISI nicht ganz zutrifft.

Man kann die ISI-Leistung durch geeignete Auswahl der Trainingssequenz beeinflussen. Die Ergebnisse stellen eine Mittelung über 10.000 zufällig gewählter Trainingssequenzen dar. Das bedeutet, dass es Trainingssequenzen geben muss, die eine geringere Schätzfehlervarianz aufweisen. Aber es gibt auch Trainingssequenzen, die eine höhere Fehlervarianz aufweisen. Der Auswahl der Trainingssequenz kommt also eine gewisse Bedeutung zu, sofern man mit signifikanten Abtastzeitfehlern rechnen muss.

Wesentlich ist aber, dass zumindest der ML-Schätzer und der L&R-Schätzer erwartungstreu über den gesamten Schätzbereich sind, selbst für Abtastzeitfehler bis zu 0,5, wie man Abb. 4-21 rechts entnehmen kann. Allerdings ist für größere Abtastzeitfehler ein leicht erhöhtes $E_{\rm S}/N_0$ erforderlich (siehe Abb. 4-21 links). Wir können dennoch schlussfolgern, dass diese beiden Frequenzschätzverfahren relativ robust gegenüber Abtastzeitfehlern sind. Der Kay-Schätzer erweist sich als deutlich empfindlicher. Er ist innerhalb des praktisch nutzbaren Schätzbereichs von 0,23 (bei $\alpha = 0,25$) nur für Fehler von $\varepsilon_{\tau} \le 0,25$ noch erwartungstreu und hat im mittleren Bereich von $E_{\rm S}/N_0$ eine deutlich höhere Fehlervarianz als die beiden anderen Schätzer.



Abb. 4-20: Auswirkungen von Fehlern des Abtastzeitpunktes: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage vT



Abb. 4-21: Auswirkungen von Fehlern des Abtastzeitpunktes: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT

4.2 Daten-unabhängige aber Takt-gestützte Schätzung

Wir betrachten nun die Frequenzschätzung unter der Annahme, dass die Datensymbole im Empfangssignal nicht bekannt sind, das Signal aber zu den optimalen Abtastzeitpunkten abgetastet wird. Die Basis für die Schätzung bilden die Abtastwerte nach der Signal-angepassten Filterung des (nicht frequenzverschobenen) Empfangssignals. Es gilt, diese Werte so zu transformieren, dass die Datenabhängigkeit verschwindet. Eine solche Transformation kann nur für ausgewählte Modulationsverfahren angegeben werden. Im Folgenden wird das Beispiel einer M-PSK-Modulation betrachtet.

Nach dem Signal-angepassten Filter sind die Abtastwerte zum optimalen Abtastzeitpunkt gegeben durch

$$y[k] \approx ha[k]e^{j(2\pi\nu(kT+\tau)+\theta)} + n[k] = ha[k]e^{j\varphi[k]} + n[k].$$
(4-36)

Das Ungefährzeichen erinnert an die Annahme, dass die Phase der komplexen Exponentialschwingung für die Dauer der Impulsantwort als konstant angenommen wurde, was ja nur für kleinere Frequenzablagen in guter Näherung gegeben ist. a[k] sei ein Datensymbol aus der Menge der *M*-PSK-Symbole, d. h.

M-PSK:
$$a[k] = e^{j2\pi m[k]/M}$$
 mit $m[k] \in \{0, 1, 2, ..., M-1\}$. (4-37)

M-PSK-Symbole zeichnen sich durch eine konstante Amplitude aus, die hier auf 1 normiert ist. Außerdem sind die Phasenwerte ganzzahlige Vielfache von $2\pi/M$. Diese Eigenschaft legt unmittelbar ein Verfahren zur Eliminierung der Datenabhängigkeit nahe: Die Bildung der *M*-ten Potenz des Empfangssignals nach dem Signal-angepassten Filter. Dadurch werden für den rauschfreien Fall alle Phasenwerte auf ganzzahlige Vielfache von 2π abgebildet und es gilt:

$$a^{M}[k] = 1 \quad \forall m[k]. \tag{4-38}$$

Im rauschfreien Fall folgt für M-te Potenz der Abtastwerte y[k]:

$$y^{M}[k] \approx h^{M} e^{j(2\pi M \nu (kT+\tau) + M\theta)} = h^{M} e^{jM\varphi[k]}$$
 (4-39)

Diese Werte können nun als Basis für alle im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Frequenzschätzer dienen. Dabei ist in den Formeln nur x[k] durch $y^{M}[k]$ zu ersetzen und die geschätzte Frequenzablage am Schluss noch durch M zu dividieren. Grund für die Division durch M ist, dass das Produkt eines Wertes $y^{M}[k]$ mit dem konjugiert komplexen Vorgängerwert $y^{M}[k-1]$ die M-fache Winkeldifferenz liefert. Aus diesem Grund ist der Schätzbereich grundsätzlich um den Faktor 1/M kleiner als bei Daten-gestützter Schätzung.

Leistungsanalyse Daten-unabhängiger Schätzer für M-PSK:

Ergebnisse aus Simulationen für dem Maximum Likelihood Schätzer sowie den Schätzern nach Kay und Luise und Reggiannini für $N = L_0/2$ sind in Abb. 4-22 und Abb. 4-23 dargestellt.



Abb. 4-22: Daten-unabhängige Schätzer: Wurzel aus dem mittleren quadratischen Schätzfehler in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT



Abb. 4-23: Daten-unabhängige Schätzer: Mittlerer Schätzwert in Abhängigkeit vom E_S/N_0 und von der Frequenzablage νT

Es lassen sich im Wesentlichen folgende Schlussfolgerungen für die Schätzer ziehen:

- Alle drei Schätzer sind innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs erwartungstreu, allerdings erst für großes E_S/N_0 (Abb. 4-23 rechts).
- Alle drei Schätzer erreichen die Cramer-Rao-Schranke; allerdings erst für großes E_S/N_0 (Abb. 4-22 links). Im Simulationsbeispiel mit $\alpha = 0,25$ ist

- für den ML-Schätzer ein $E_{\rm S}/N_0$ von mehr als 11 dB
- für den Kay-Schätzer ein $E_{\rm S}/N_0$ von mehr als 15 dB und
- für den L&R-Schätzer ein E_S/N_0 von mehr als ca. 10 dB

erforderlich.

- Innerhalb des nutzbaren Schätzbereichs ist nur eine geringe Erhöhung des mittleren quadratischen Fehlers festzustellen (Ausnahme: Kay bei 10 dB).
- Die Schätzbereiche der einzelnen Schätzer sind etwa um den Faktor 1/*M* reduziert. Dies dürfte der wesentliche Nachteil der Daten-unabhängigen Schätzung sein. Der ML-Schätzer erweist sich auch hier als der beste Schätzer mit einem Schätzbereich von vT < 0,125, gefolgt vom Kay-Schätzer mit vT < 0,083 für $\alpha = 0,25$ und L&R mit vT < 0,0125. Damit ist der L&R-Schätzer für die meisten Anwendungen nicht mehr interessant.

Der ML-Schätzer ist den anderen beiden deutlich überlegen, sowohl bzgl. des mittleren Schätzfehlers als auch bzgl. des Schätzbereichs. Aber auch der hat seine Grenzen:

- Er ist nur einsetzbar, wenn die maximal erwartete Frequenzablage vT < 0.5/M beträgt.
- Er liefert nur bei einem $E_{\rm S}/N_0$ von > 10 dB bei L_0 = 32 brauchbare Ergebnisse.

Einfluss von L₀, α und M auf den ML-Schätzer

Da man hier nicht auf die Länge einer Trainingssequenz angewiesen ist, ließe sich die Rauschempfindlichkeit grundsätzlich durch eine Verlängerung des Beobachtungsintervalls L_0 noch etwas verbessern. Verdoppelt man z.B. L_0 von 32 auf 64 wären nur noch 8 dB erforderlich, um brauchbare Resultate zu erzielen. Gleichzeitig sinkt der mittlere quadratische Schätzfehler um den Faktor 1/8.

Der Roll-off-Faktor α hat dagegen nur einen vernachlässigbaren Einfluss.

Eine höherwertigere PSK-Konstellation (M > 4) erweist sich jedoch als äußerst nachteilig, da nicht nur der Schätzbereich deutlich eingeschränkt wird, sondern auch die Empfindlichkeit gegen Rauschstörungen erheblich verschlechtert wird. Z.B. ist für 8-PSK ein E_S/N_0 von > 16 dB bei $L_0 = 32$, also 6 dB mehr als bei QPSK erforderlich.

4.3 Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung

Weder a[k] noch τ noch θ sind bekannt.

Für Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung ist die Likelihoodfunktion nicht mehr exakt berechenbar. Für nicht frequenzselektive Kanäle und große SNR kann als Pseudo-Log-Likelihoodfunktion die mittlere Leistung am Ausgang des Signal-angepassten Filters verwendet werden:

$$L'(\tilde{\nu}) \approx \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left| x(t \mid \tilde{\nu}) \right|^2 dt = \overline{P}_x(\tilde{\nu}) \quad \text{(mittlere Leistung)} \tag{4-40}$$

mit

$$x(t) = \int r(\xi) e^{-j2\pi \tilde{v}\xi} g^*(\xi - t) d\xi . \qquad (4-41)$$



Abb. 4-24: Struktur des ML-Schätzers für Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung

Auf eine Beweisführung wird hier verzichtet. Wir begnügen uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung. Für ein unendlich langes Beobachtungsintervall ($T_0 \rightarrow \infty$) ist die mittlere Leistung des gefilterten Signals gegeben durch

 $\overline{P}_{S} = \int S(f) |G(f)|^{2} df ,$

$$\overline{P}_{X} = \overline{P}_{S} + \overline{P}_{N} \tag{4-42}$$

mit

wobei S(f) das Leistungsdichtespektrum des um ν frequenzverschobenen Nutzsignals ist. Die Rauschleistung \overline{P}_N ist bei weißem Gaußschen Rauschen unabhängig von der Frequenzverschiebung. Daher genügt es, die Abhängigkeit der Nutzleistung \overline{P}_S von ν und $\tilde{\nu}$ zu betrach-

$$S(f) \sim \left| G(f - \tilde{\nu} + \nu) \right|^2, \tag{4-44}$$

d. h.
$$\overline{P}_{s} \sim \int \left| G\left(f - \tilde{\nu} + \nu\right) \right|^{2} \left| G\left(f\right) \right|^{2} df .$$
 (4-45)

Die Anwendung der Schwarzschen Ungleichung liefert

ten. Für nicht-frequenzselektive Kanäle gilt:

$$\left(\int \left|G\left(f-\tilde{\nu}+\nu\right)\right|^{2}\left|G\left(f\right)\right|^{2}df\right)^{2} \leq \int \left|G\left(f-\tilde{\nu}+\nu\right)\right|^{4}df\int \left|G\left(f\right)\right|^{4}df \qquad (4-46)$$

mit Gleichheit nur dann, wenn $|G(f-\tilde{v}+v)|^2$ proportional zu $|G(f)|^2$ ist. Beide Integrationen auf der rechten Seite der Ungleichung werden über einen unendlichen Frequenzbereich ausgeführt, so dass beide denselben Wert unabhängig von $v-\tilde{v}$ liefern. Die linke Seite ist genau dann maximal, wenn Gleichheit gilt, woraus sich die Bedingung ergibt, dass $|G(f-\tilde{v}+v)|^2$ bis auf eine Konstante identisch mit $|G(f)|^2$ sein muss. Dies ist bei bandbe-

(4-43)

grenzten Modulationsimpulsen nur für $\tilde{\nu} - \nu = 0$ gegeben. Damit ist es gerechtfertigt, (4-40) als Pseudo-Log-Likelihoodfunktion zu verwenden. Wir schlussfolgern:

Als Pseudo-Log-Likelihoodfunktion $logL'(\tilde{v})$ für Takt- und Daten-unabhängige Frequenzschätzung kann die Autokorrelierte des Energiespektrums $|G(f)|^2$ des Modulationsgrundimpulses g(t) dienen.

Abb. 4-25 und Abb. 4-26 veranschaulichen die Verhältnisse am Beispiel von Wurzel-Cosinus-Impulsen.



Abb. 4-25: Leistungs-Übertragungsfunktion des matched Filters und Leistungsdichtespektrum eines Empfangssignals mit Wurzel-Cosinus-Impulsen (hier $\alpha = 0.5$)



Abb. 4-26: Pseudo-Log-Likelihoodfunktion für Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung bei linearer Modulation mit Wurzel-Cosinus-Impulsen. (= Leistung nach dem Signal-angepassten Filter eines Frequenz-verschobenen Empfangssignals.)

Es ist offensichtlich, dass die Leistung nach dem matched Filter ein eindeutiges relatives Maximum aufweist und damit über den Ansatz

$$\frac{d\overline{P}_{X}}{d\tilde{V}} = 0 \tag{4-47}$$

für $|v - \tilde{v}| < 1$ berechenbar ist.

Wie bereits in Kap. 3, Abschnitt 3.3.3 ausgeführt, liefert die Ableitung der Log-Likelihoodfunktion nach $\tilde{\nu}$ ein Kriterium, das etwas über die Frequenzablage aussagt: Es ist für $\tilde{\nu} < \nu$ positiv und für $\tilde{\nu} > \nu$ negativ und eignet sich direkt zur Korrektur der Frequenzablage. Diese Überlegung kann natürlich auch auf die Pseudo-Log-Likelihoodfunktion angewendet werden, d.h. wir können die Ableitung der Leistung nach $\tilde{\nu}$ als Fehlersignal verwenden. Um auf Veränderungen reagieren zu können, verzichten wir auf eine Mittelung und verwenden statt der mittleren Leistung die Momentanleistung. Somit erhalten wir als Fehlermaß

$$e(t) = \frac{\partial P_{x}(t)}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} \Big(x(t \mid \tilde{v}) x^{*}(t \mid \tilde{v}) \Big)$$
$$= \frac{\partial x(t \mid \tilde{v})}{\partial \tilde{v}} x^{*}(t \mid \tilde{v}) + x(t \mid \tilde{v}) \frac{\partial x^{*}(t \mid \tilde{v})}{\partial \tilde{v}}$$
$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ x(t \mid \tilde{v}) \frac{\partial x^{*}(t \mid \tilde{v})}{\partial \tilde{v}} \right\}.$$

Nun muss noch $x^*(t|\tilde{v})$ nach \tilde{v} differenziert werden. Diese Operation kann als direkte Filterung des frequenzverschobenen Empfangssignals dargestellt werden. Um das zu verifizieren, differenzieren wir (4-41) nach \tilde{v} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t \mid \tilde{v})}{\partial \tilde{v}} &= j \int 2\pi (-\xi) r(\xi) e^{-j2\pi \tilde{v}\xi} g^* (\xi - t) d\xi \\ &= j \underbrace{\int r(\xi) 2\pi (t - \xi) e^{-j2\pi \tilde{v}\xi} g^* (\xi - t) d\xi}_{y(t \mid \tilde{v})} - j2\pi t \underbrace{\int r(\xi) e^{-j2\pi \tilde{v}\xi} g^* (\xi - t) d\xi}_{x(t \mid \tilde{v})} \\ &= j \Big(y(t \mid \tilde{v}) - 2\pi t x(t \mid \tilde{v}) \Big). \end{aligned}$$

Es folgt

mit

 $\frac{\partial x^*(t \mid \tilde{v})}{\partial \tilde{v}} = -j\left(y^*(t \mid \tilde{v}) - 2\pi t x^*(t \mid \tilde{v})\right)$ (4-48)

$$y(t|\tilde{v}) = \int r(\xi) e^{-j2\pi\tilde{v}\xi} 2\pi(t-\xi) g^*(\xi-t) d\xi. \qquad (4-49)$$

 $y(t | \tilde{v})$ kann als Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems mit der Impulsantwort $h(t) = 2\pi t g^*(-t)$ interpretiert werden. Die Übertragungsfunktion H(f) dieses Systems ist gegeben durch

$$H(f) = j \frac{dG^*(f)}{df}$$

Deswegen wird das Filter oft auch abgeleitetes matched Filter (derivative matched filter) genannt. Setzt man (4-48) oben ein, erhält man

$$e(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ x(t \mid \tilde{v}) \left(-jy^{*}(t \mid \tilde{v}) + j2\pi tx^{*}(t \mid \tilde{v}) \right) \right\}$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ -jx(t \mid \tilde{v}) y^{*}(t \mid \tilde{v}) + \underbrace{j2\pi t \left| x(t \mid \tilde{v}) \right|^{2}}_{\operatorname{rein \, imagin \ddot{a} r}} \right\}$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left\{ x(t \mid \tilde{v}) y^{*}(t \mid \tilde{v}) \right\} \qquad (4-50)$$

Um zeitdiskrete Signalverarbeitung anwenden zu können, müssen die Signale x(t) und y(t) abgetastet werden. Die Abtastrate muss so gewählt werden, dass e(t) möglichst unabhängig vom genauen Abtastzeitpunkt ist. Im Anhang H wird gezeigt, dass dazu eine Überabtastung (mehr als ein Abtastwert pro Symbol) erforderlich ist. Ferner wird gezeigt, dass bei Signalen, die auf $\pm 1/T$ bandbegrenzt sind, eine Abtastung mit nur 2 Werten pro Symbol und anschließender Mittelung über 2 Werte bereits ausreicht, um vom Abtastzeitpunkt unabhängig zu sein. Wurzel-Cosinus-Impulse erfüllen diese Bedingung für alle Roll-off-Faktoren α . Wir bezeichnen den Überabtastfaktor mit m. Das Fehlersignal zur Ansteuerung einer Regelschleife ist allgemein gegeben durch

$$e[k] = \frac{2}{m} \sum_{i=mk-m}^{mk-1} \operatorname{Im}\left\{x[i] y^{*}[i]\right\}.$$
(4-51)

Darin sind x[i] Abtastwerte des Zeitsignals x(t) gemäß (4-41) und y[i] Abtastwerte des Zeitsignals y(t) gemäß (4-49). Die Erzeugung des Phasenschätzwertes erfolgt dann über die rekursive Vorschrift

$$\hat{\nu}[k+1] = \hat{\nu}[k] + \gamma e[k].$$
 (4-52)

Mit diesem Ergebnis lässt sich der rekursive Frequenzschätzer ohne Takt- und Datenkenntnis in Form des Blockschaltbildes nach Abb. 4-27 darstellen.



Abb. 4-27: Frequenzregelkreis für ML-Schätzung bei unbekannten Parametern mit *M*-facher Überabtastung

Wie aus Kapitel 3, Abschnitt 3.3.3 bekannt, kann das Fehlersignal als Summe aus seinem Erwartungswert und einer mittelwertfreien Zufallsvariablen aufgefasst werden, wobei der Erwartungswert den gewünschten Zusammenhang mit dem Frequenzschätzfehler $\Delta v[k] = v - \hat{v}[k]$ darstellt und der Rest als Störsignal aufgefasst wird:

$$e[k] = S(\Delta \nu[k]) + n_e[k].$$
(4-53)

Damit lässt sich das allgemeine regelungstechnische Ersatzschaltbild gemäß Abb. 4-28 angeben. Die Nichtlinearität ist durch

$$S(\Delta v) = \mathbb{E}\left[e[k]|\Delta v\right] \text{ mit } \Delta v = v - \hat{v}.$$
(4-54)

definiert. Sie ist unabhängig vom Zeitindex k und, wie sich zeigen lässt, für das Fehlermaß (4-51) weder von der Modulation (M-PSK oder M-QAM) noch von E_S/N_0 abhängig. Man

bekommt die S-Kurve durch Differentiation des Erwartungswertes der Log-Likelihoodfunktion, der wiederum durch die Autokorrelierte des Energiespektrums des Modulationsimpulses gegeben ist.



Abb. 4-28: Regelungstechnisches Ersatzschaltbild des Frequenzregelkreises nach Abb. 4-27

Für Wurzel-Cosinus-Impulse sind also die S-Kurven, wie sie beispielhaft in Abb. 4-26 für ausgewählte Roll-off-Faktoren α dargestellt sind, zu differenzieren. Die Ergebnisse sind in Abb. 4-29 dargestellt. Die S-Kurve nähert sich für kleine Werte α immer mehr einer Rechteckform an. Für kleine Frequenzablagen $\Delta \nu \ll 1/T$ kann die S-Kurve gut durch eine Gerade angenähert werden, deren Steigung K_D aber vom Roll-off-Faktor α abhängt. Auf die aufwändige Herleitung des genauen Zusammenhangs mit α wird hier verzichtet. Stattdessen geben wir das einfache Ergebnis an:



Abb. 4-29: S-Kurven für Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung für Wurzel-Cosinus-Impulse (statistisch unabhängige Datensymbole)

An dieser Stelle sei betont, dass die Form der S-Kurve im Allgemeinen von den statistischen Eigenschaften der gesendeten Daten abhängig ist. Die gezeigten Graphen gelten unter der Annahme statistisch unabhängiger Datensymbole.

Es interessiert nun die Frage, wie man die Qualität dieses Schätzers beurteilen muss. In Kap. 3, Abschnitt 3.3.3 wurde bereits gezeigt, dass man für jedes rekursive System ein äquivalentes nicht-rekursives System mit gleicher Schätzvarianz angeben kann, wobei sich die Beobachtungsdauer L_0 des äquivalenten nicht-rekursiven Systems gemäß

$$L_{0} = \frac{1}{B_{\rm L}T} \left(= \frac{2}{K_{\rm D}\gamma} - 1 \text{ für } F(z) = 1 \right)$$
(4-56)



Abb. 4-30: Schätzfehler in Abh. vom E_S/N_0 bei Daten- und Takt-unabhängiger Frequenzschätzung sowie die zugehörigen Cramer-Rao-Schranken für verschiedene Rauschbandbreiten.

In Abb. 4-30 ist der Schätzfehler über E_S/N_0 für verschiedene äquivalente Rauschbandbreiten aufgetragen. Als Maß für den Schätzfehler betrachten wir die Wurzel aus der mittleren quadratischen Differenz zwischen dem Schätzwert \hat{v} und dem exakten Wert v (RMS-Fehler). Die Cramer-Rao-Schranken für die äquivalenten nicht-rekursiven Systeme sind ebenfalls angegeben. Offensichtlich werden die Schranken nicht annähernd erreicht. Es wird deutlich, dass auch bei großem E_S/N_0 die Standardabweichung des Fehlers nicht unter eine gewisse Grenze kommt. Dies ist auf den Einfluss der (unbekannten) Datensymbole zurückzuführen, der sich in Form einer irreduziblen Fehlervarianz bemerkbar macht. Diese Fehlervarianz kann nur durch Verringerung der äquivalenten Rauschbandbreite reduziert werden. Es lässt sich zeigen, dass eine Halbierung von B_LT die Varianz des Daten-abhängigen Anteils der Störung ebenfalls halbiert, d. h. die Standardabweichung wird um den Faktor $\sqrt{2}$ reduziert. Dies wird durch die Ergebnisse aus Abb. 4-30 für große E_S/N_0 bestätigt. Die Cramer-Rao-Schranke für die Varianz des Frequenzschätzfehlers ist dagegen proportional zu $(B_LT)^{-3}$.

errechnet.

5 Phasenschätzung

Der zu schätzende Parameter ist $\lambda = \theta$. Die Frequenz ν und der Abtastzeitpunkt τ werden zunächst als bekannt angenommen, d. h. $\tilde{\nu} = \nu$ und $\tilde{\tau} = \tau$. Später wird der Einfluss eines Schätzfehlers in der Frequenz analysiert. Die Phase wird als unbekannt mit einer Gleichverteilung zwischen 0 und 2π angenommen.

Wie bei Frequenzschätzung wird bzgl. der Symbolfolge unterschieden:

- 1. Daten-gestützte Schätzung (data aided estimation)
- 2. Entscheidungs-gestützte Schätzung (decision directed estimation)
- 3. Daten-unabhängige Schätzung (Non data aided estimation)

Außerdem unterscheidet man Takt-gestützte und Takt-unabhängige Schätzung.

Im Folgenden beschränken wir uns auf Signale mit folgenden Eigenschaften:

1. Der Modulationsgrundimpuls erfüllt die Nyquist-Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t - kT) dt = \begin{cases} E_g & \text{für } k = 0\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$
(5-1)

2. Die Modulation ist linear. Das Empfangssignal hat die Form

$$r(t) = he^{j(2\pi vt+\theta)} \sum_{i} a[i]g(t-iT-\tau) + w(t).$$
(5-2)

Darin ist *h* wieder der Kanalübertragungsfaktor.

5.1 Daten- und Takt-gestützte Schätzung

v, τ und a[k] für $k = 1, 2, ..., L_0$ sind bekannt.

5.1.1 Maximum Likelihood-Schätzung

Als Log-Likelihood-Funktion verwenden wir (siehe (3-51) und (3-52)):

$$\log L(\tilde{\theta}) = \operatorname{Re}\left\{\int_{T_0} r(t) s^*(t | \tilde{\theta}, \underline{u}) dt\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] x[k]\right\}$$
(5-3)

mit

$$x[k] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi v t} g^* (t - kT - \tau) dt.$$
 (5-4)

Es ist offensichtlich, dass der Realteil des Ausdrucks in (5-3) genau dann maximal wird, wenn die Phasenhypothese $\tilde{\theta}$ gleich dem Phasenwert des Summenausdrucks ist. Aus dieser Überlegung folgt für den Maximum Likelihood Schätzwert die geschlossene Lösung

$$\hat{\theta} = \arg\left\{\sum_{k=1}^{L_0} a^*[k] x[k]\right\}.$$

$$(5-5)$$

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g^*(-t) \qquad x[k] \quad a^*[k] \quad a^*[k] \qquad x[k] \quad a^*[k] \quad a^$$

Abb. 5-1: Maximum Likelihood Phasenschätzung

5.1.2 Rauschanalyse

(5-2) in (5-4) eingesetzt ergibt

$$a^{*}[k]x[k] = he^{j\theta} \sum_{i} a[i]a^{*}[k] \int g(t - iT - \tau) g^{*}(t - kT - \tau) dt + a^{*}[k]n[k]$$

= $h |a[k]|^{2} e^{j\theta} + a^{*}[k] \cdot n[k]$ (5-6)

mit den Rauschwerten

$$n[k] = \int w(t) e^{-j2\pi v t} g^* (t - kT - \tau) dt.$$
 (5-7)

Nach einem Nyquistfilter sind die Rauschwerte im Symboltakt unkorreliert und für Energienormierte Modulationsimpulse g(t) ist ihre Varianz gegeben durch N_0/T wobei N_0 die Rauschleistungsdichte und *T* die Symboldauer ist. Für die folgenden Betrachtungen setzen wir voraus, dass die mittlere Symbolenergie innerhalb des Beobachtungsintervalls 1 beträgt, d.h. es gilt

$$\frac{1}{L_0} \sum_{k=1}^{L_0} \left| a[k] \right|^2 = 1.$$
(5-8)

Um den Einfluss des Rauschens auf den Schätzwert zu analysieren, setzen wir (5-6) in (5-5) ein und erhalten

$$\hat{\theta} = \arg\left\{e^{j\theta}\sum_{k=1}^{L_0} \left(h\left|a\left[k\right]\right|^2 + a^*\left[k\right] \cdot n\left[k\right]e^{-j\theta}\right)\right\}$$

$$= \arg\left\{e^{j\theta}\left(hL_0 + \sum_{k=1}^{L_0} n'\left[k\right]\right)\right\} \quad \text{mit } n'\left[k\right] = a^*\left[k\right] \cdot n\left[k\right]e^{-j\theta}$$

$$= \theta + \arg\left\{hL_0 + \sum_{k=1}^{L_0} n'\left[k\right]\right\}$$
(5-9)

Darin repräsentiert der zweite Term das Phasenrauschen, das wir mit n_{θ} bezeichnen wollen. hL_0 repräsentiert die Amplitude des Nutzanteils und die Summe über L_0 Rauschwerte n[k]repräsentiert additives Gauß'sches Rauschen mit der Varianz $L_0 \cdot N_0 / T$. Ist das Nutz-zu-Rausch-Leistungsverhältnis nach der Summation über L_0 Werte hinreichend groß - d. h. $L_0E_s/N_0 \gg 1$ - gilt die Näherung

$$n_{\theta} = \arctan \frac{\sum_{k=1}^{L_0} \operatorname{Im} \{n'[k]\}}{hL_0 + \sum_{k=1}^{L_0} \operatorname{Re} \{n'[k]\}} \approx \frac{1}{hL_0} \sum_{k=1}^{L_0} \operatorname{Im} \{n'[k]\}.$$
(5-10)

Nun ist die Rauschleistung gegeben durch $E\left[\left(\operatorname{Im}\left\{n'[k]\right\}\right)^2\right] = \frac{N_0}{2T}$. Die Empfangsleistung $E_{\rm S}/T$ ist gegeben durch die Sendeleistung $E_{\rm g}E[|A[k]|^2]/T$ multipliziert mit h^2 . Für ein normiertes Symbolalphabet und Leistungs-normierte Modulationsimpulse (d.h. $E_{\rm g}/T = 1$) gilt $E_{\rm S}/T = h^2$. Daraus folgt für die Varianz des Schätzfehlers

$$\mathbf{E}\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)^{2}\right] = \mathbf{E}\left[n_{\theta}^{2}\right] \approx \frac{N_{0}}{2\frac{E_{s}}{T}L_{0}T}.$$
(5-11)

Schließlich folgt

$$\mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^{2}\right]\approx\frac{1}{2L_{0}E_{\mathrm{S}}/N_{0}}.$$
(5-12)

Dies ist exakt die Cramer-Rao-Schranke für die Phasenschätzung, die asymptotisch für große E_S/N_0 erreicht wird. Damit ist bewiesen, dass der ML-Schätzer asymptotisch optimal ist.

5.1.3 Degradation auf Grund von Frequenzschätzfehlern

Bisher wurde eine perfekte Frequenzschätzung angenommen, was in der Realität aber nie gegeben ist. Wir wollen nun den Einfluss einer ungenauen Frequenzkorrektur analysieren. Wir bezeichnen den Frequenzschätzfehler mit $\Delta v = v - \hat{v}$ und nehmen an, dass er sehr viel kleiner ist als die Symbolrate, d. h. $\Delta v \ll 1/T$. Dies ist sicher eine realistische Annahme, da vor der Phasenschätzung immer eine Frequenzschätzung erfolgt.

(5-2) in (5-4) eingesetzt ergibt

$$a^{*}[k]x[k] = he^{j(2\pi\Delta\nu kT + \theta)} \sum_{i} a[i]a^{*}[k] \int g(t - iT - \tau)g^{*}(t - kT - \tau)dt + a^{*}[k]n[k]$$

= $he^{j2\pi\Delta\nu kT}e^{j\theta} + a^{*}[k]n[k]$ (5-13)

Darin ist θ nun der Phasenwinkel für k = 0, d.h. für das Symbol unmittelbar vor Beginn des Beobachtungsintervalls. Für den Schätzwert resultiert

$$\hat{\theta} = \arg \left\{ e^{j\theta} \sum_{k=1}^{L_0} \left(h e^{j2\pi\Delta\nu kT} + n'[k] \right) \right\}$$

= $\theta + \arg \left\{ h e^{j(L_0+1)\pi\Delta\nu T} L_0 \rho \left(\Delta\nu T \right) + \sum_{k=1}^{L_0} n'[k] \right\}.$ (5-14)

Darin ist $\rho(x)$ eine Funktion, die gegeben ist durch

$$\rho(x) = \frac{\sin(L_0 \pi x)}{L_0 \sin(\pi x)}.$$
(5-15)

Dieser Korrekturfaktor resultiert aus der Anwendung der Summenformel für eine endliche Potenzreihe auf die Summe über $e^{j2\pi\Delta\nu kT}$ für $k = 1...L_0$:

$$\sum_{k=1}^{L_0} e^{j2\pi\Delta vkT} = \sum_{k=1}^{L_0} u^k \quad \text{mit} \quad u = e^{j2\pi\Delta vT}$$

$$= u \frac{1-u^{L_0}}{1-u}$$

$$= u \frac{u^{L_0/2}}{u^{1/2}} \frac{u^{-L_0/2} - u^{L_0/2}}{u^{-1/2} - u^{1/2}}$$

$$= u^{(L_0+1)/2} \frac{u^{-L_0/2} - u^{L_0/2}}{u^{-1/2} - u^{1/2}}$$

$$= e^{j(L_0+1)\pi\Delta vT} \frac{e^{-j2\pi\Delta vT L_0/2} - e^{j2\pi\Delta vT L_0/2}}{2j} \frac{2j}{\frac{e^{-j\pi\Delta vT} - e^{j\pi\Delta vT}}{\frac{1}{-\sin(\pi\Delta vT)}}}$$

$$= e^{j(L_0+1)\pi\Delta vT} \frac{\sin\left(L_0\pi\Delta vT\right)}{\sin\left(\pi\Delta vT\right)}$$

 $\rho(\Delta vT)$ ist reell und betragsmäßig höchstens 1. Zieht man in (5-14) noch den Faktor $e^{j(L_0+1)\pi\Delta vT}$ heraus lässt sich der Schätzwert in der Form

$$\hat{\theta} = \theta + (L_0 + 1)\pi\Delta vT + \arg\left\{hL_0\rho(\Delta vT) + \sum_{k=1}^{L_0}n''[k]\right\}$$
(5-16)

darstellen. Für $\Delta v = 0$ ist $\rho(.) = 1$ und (5-16) geht in (5-9) über. Der mittlere Term stellt also den Einfluss des Frequenzversatzes dar. Er kann interpretiert werden als Phasenwert in der Mitte des Beobachtungsintervalls (bei $t = T(L_0+1)/2$), verursacht durch den Frequenzversatz. $\hat{\theta}$ stellt also einen erwartungstreuen Phasenschätzwert für die Mitte des Beobachtungsintervalls dar.

Das Phasenrauschen n_{θ} ist offensichtlich wieder mittelwertfrei. Die Rauschwerte n''[k] unterscheiden sich von n'[k] nur durch den Rotationsfaktor $e^{-j(L_0+1)\pi\Delta\nu T}$. Sie haben also dieselbe Varianz. Zur Abschätzung der Varianz des Phasenrauschens kann analog zu (5-10) die arctan-Funktion wieder durch ihr Argument ersetzt werden. Es resultiert

$$\mathbf{E}\left[\left(\theta + \pi\Delta\nu T\left(L_{0}+1\right)-\hat{\theta}\right)^{2}\right] = \frac{1}{2L_{0}\rho^{2}\left(\Delta\nu T\right)E_{\mathrm{S}}/N_{0}}.$$
(5-17)

Ein Vergleich von (5-12) mit (5-17) offenbart, dass ein Frequenzversatz die Schätzfehlervarianz um den Faktor $1/\rho^2(\Delta vT)$ vergrößert.

Wir wollen nun noch der Frage nachgehen, welche Frequenzablage noch tolerierbar ist, ohne dass es zu systematischen Fehlern bei der Symboldetektion kommt. Bei Daten-gestützter Phasenschätzung wird die geschätzte Phase zur Detektion von N Symbolen herangezogen, die direkt im Anschluss an die Trainingssequenz übertragen werden. Auch beim letzten Symbol, bei dem die Frequenzablage die größtmögliche Phasenablage verursacht, soll noch eine korrekte Symbolentscheidung auf Basis der Phasenschätzung möglich sein. Wie oben schon festgestellt, ist die geschätzte Phase für die Mitte des Beobachtungsintervalls ablagefrei. Zwischen der Mitte und dem letzten von N Datensymbolen befinden sich noch etwa $L_0/2 + N$ Symbolintervalle, so dass die Phasenablage $(L_0/2 + N)2\pi\Delta VT$ beträgt. Bei *M*-PSK darf die theoretisch maximale Ablage aber π/M nicht überschreiten, was der halben Winkeldifferenz zwischen benachbarten Symbolen entspricht. Würde diese Grenze überschritten, käme es zu Fehlentscheidungen auch wenn kein Rauschen vorhanden wäre. Daraus resultiert als Anforderung an die Genauigkeit der Frequenzsynchronisation

für *M*-PSK:
$$\Delta vT < \frac{1}{M(L_0 + 2N)}.$$
 (5-18)

Zusammenfassend hat der ML-Phasenschätzer mit Frequenzablage folgende Merkmale:

- Er ist erwartungstreu für die Mitte des Beobachtungsintervalls,
- die Varianz des Schätzfehlers liegt um den Faktor $1/\rho^2(\Delta vT)$ oberhalb der Cramer-Rao-Schranke,
- Die zulässige Frequenzablage ist durch die Länge L_0 des Beobachtungsintervalls und die Anzahl N der darauf folgenden Datensymbole begrenzt.

5.2 Entscheidungsgestützte Phasenschätzung

v und τ sind bekannt. Die Datensymbole a[k] sind zwar nicht bekannt, werden aber geschätzt.

Entscheidungsgestützte Phasenschätzung erfordert entweder eine rückgekoppelte Struktur oder ein iteratives Verfahren, da vor der Datenschätzung eine Phasenkorrektur mit dem jeweils aktuellen Phasenschätzwert erfolgen muss.

Bei *rückgekoppelten* Strukturen werden ausschließlich Werte aus der Vergangenheit des Signals für die Verbesserung gegenwärtiger und zukünftiger Schätzwerte eingesetzt. Die Schätzung wird mit fortschreitender Zeit immer besser. Im Gegensatz dazu wird bei rein *iterativen* Verfahren ein Signalausschnitt betrachtet, aus dem zunächst für eine erste Phasenhypothese die Datensymbole geschätzt werden. Mit Hilfe dieser geschätzten Symbole wird aus demselben Signalabschnitt eine verbesserte Phasenschätzung gewonnen, die dann wiederum zu einer verbesserten Datenschätzung dient. Mit fortschreitenden Iterationsschritten wird die Schätzung dann immer besser.

Entscheidungsgestützte Verfahren haben das grundsätzliche Problem, dass die Phasenschätzung bei rotationssymmetrischem Symbolalphabet immer mehrdeutig ist. Wenn $\hat{\theta}$ eine geschätzte Phase ist, dann sind bei M-PSK auch alle Werte $\hat{\theta} + 2m\pi/M$ für m = 0,1,...,M-1 gültige Schätzwerte. Das Symbolalphabet von M-QAM ist ebenfalls rotationssymmetrisch. Bei Drehung um ganzzahlige Vielfache von 90° wird die Symbolkonstellation auf sich selbst abgebildet. Diese Mehrdeutigkeit kann nur durch zusätzliche Nebeninformationen beseitigt werden. Eine Möglichkeit ist die zusätzliche Verwendung von Daten-gestützter Schätzung in Verbindung mit senderseitig eingestreuten Trainingssymbolen. Dabei kommt der Datengestützten Schätzung die Aufgabe der Anfangssynchronisation und der Entscheidungsgestützten Schätzung die Aufgabe des Nachführens zu.

Nun könnte man zu dem Schluss kommen, dass man dann eigentlich auf die Entscheidungsgestützte Schätzung ganz verzichten kann. Dieser Schluss ist sicher zulässig, wenn die Kanaleigenschaften sich nicht mit der Zeit ändern. Bei zeitvarianten Kanälen, wie z.B. Funkkanälen, bei denen man von relativ schnellen Änderungen der Phase ausgehen muss, müssten für eine rein Daten-gestützte Schätzung sehr häufig Trainingssequenzen in die Daten eingefügt werden, was die Übertragungseffizienz verringert. Bei Verwendung eines Entscheidungsgestützten Regelkreises können die Intervalle zwischen den Trainingsdaten wesentlich länger ausgelegt und so die Übertragungseffizienz gesteigert werden.

Im Kapitel 2 haben wir bereits eine rückgekoppelte Anordnung zur Schätzung der Phase ausführlich behandelt: Die Phasenregelschleife (PLL). Die dort betrachtete Signalverarbeitung war aber ausschließlich analog. Wir wollen nun einen Phasenregelkreis mit ausschließlich digitaler Signalverarbeitung entwerfen, der auf der Maximierung der Likelihoodfunktion basiert. Das regelungstechnische Ersatzschaltbild ist in Abb. 5-2 dargestellt. Es wurde bereits in seiner allgemeinen Form im Kapitel 3 eingeführt.





Wir wollen uns nun der Aufgabe widmen, das Fehlersignal e[k] aus Abtastwerten des gefilterten Empfangssignals zu gewinnen. Costas hat eine Lösung dieser Aufgabe vorgeschlagen, die sich heute großer Beliebtheit erfreut. Ihm zu Ehren wird der ganze Regelkreis nach ihm benannt.

5.2.1 Der Costas-Regelkreis

Dem Costas-Regelkreis liegt der ML-Ansatz aus Kap. 3, Abschnitt 3.3.3 zu Grunde, nämlich das Fehlersignal aus der nach $\tilde{\theta}$ abgeleiteten Log-Likelihoodfunktion zu gewinnen. Dabei genügt es, von der Log-Likelihoodfunktion nur einen Wert aus der Vergangenheit zu verwenden. Mit $L_0 = 1$ folgt aus (5-3)

$$e[k] = \frac{d}{d\tilde{\theta}} \log L(\tilde{\theta}) = \operatorname{Im}\left\{\hat{a}^*[k]x[k]e^{-j\tilde{\theta}[k]}\right\}.$$
(5-19)

Die Erzeugung des Phasenschätzwertes erfolgt dann über die rekursive Vorschrift

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + \gamma e[k], \qquad (5-20)$$

die durch den letzten Block in Abb. 5-2 repräsentiert wird. Die Struktur des Costas-Phasenregelkreises zeigt Abb. 5-3.



Abb. 5-3: Costas-Regelkreis zur Phasensynchronisation

Das Schleifenfilter ist nicht unbedingt erforderlich. Es erlaubt jedoch eine weitere Optimierung des dynamischen und des stationären Verhaltens. Von der PLL wissen wir, dass man eine Phasenrampe vollständig ausregeln kann, wenn das (analoge) Schleifenfilter eine Polstelle bei s = 0 besitzt. Das entsprechende Verhalten kann mit dem Costas-Regelkreis erreicht werden, indem man F(z) mit einem Pol bei z = 1 versieht. Mit $F(z) = \frac{1}{z-1}$ können Restfehler nach der Frequenzschätzung und -korrektur vollständig eliminiert werden. Damit erweist sich der Costas-Regelkreis auch robust gegenüber Fehlern in der Frequenzsynchronisation.

Die Nichtlinearität – oder auch S-Kurve genannt – ist eine komplizierte Funktion von $\Delta\theta$. Wegen der Mehrdeutigkeit bei rotationssymmetrischen Symbolkonstellationen ist diese innerhalb des Intervalls ($-\pi$, π] periodisch. Bei M-PSK besteht sie aus genau *M* Perioden. Bei M-QAM besitzt sie vier Perioden. Die Form der S-Kurve hängt signifikant vom Modulationsalphabet und von E_S/N_0 ab. Die genauen Zusammenhänge sind sehr kompliziert und sollen hier nicht näher betrachtet werden. Stattdessen diskutieren wir beispielhaft einige S-Kurven wie sie in Abb. 5-4 dargestellt sind. Die Kurven sind Ergebnisse von Simulationen, wobei jeder Punkt der S-Kurve einen Mittelwert von e[k] über 100.000 Datensymbole darstellt.

Betrachten wir zunächst M-PSK. Unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie der Symbolkonstellation und unter der Annahme hinreichend geringen Rauschens lässt die S-Kurve noch analytisch angeben:

$$S(\Delta\theta) \approx \sin(\Delta\theta \mod 2\pi/M)$$
 für *M*-PSK mit Amplitude 1. (5-21)

Darin ist der Funktionsbereich der Modulo-Funktion durch das Intervall ($-\pi/M$, π/M] definiert. Gleichheit ist erfüllt unter der Annahme, dass kein Rauschen vorliegt. Die Funktion (5-21) ist periodisch mit der Periodenlänge $2\pi/M$. Sie hat sägezahnähnlichen Charakter, wie das auch im linken Bild von Abb. 5-4 für $E_S/N_0 = 30$ dB zum Ausdruck kommt. Mit zunehmender Rauschvarianz verschleifen die steilen Flanken und die Knickstellen werden abgerundet. Die Regelabweichung darf in jedem Fall eine Periode, d.h. $\pm 45^{\circ}$ nicht überschreiten. Die Steigung K_D der S-Kurve bei $\Delta \theta = 0$ ist bei Vernachlässigung des Rauschens exakt 1, was durch $E[|a[k]|^2] = 1$ bedingt ist. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass dies in guter Näherung auch für E_S/N_0 größer als ca. 5 dB gilt.



Abb. 5-4: S-Kurven für Daten-unabhängige Phasenschätzung mit QPSK und 16-QAM (dargestellt ist jeweils nur eine Periode der Funktion)

Bei 16-QAM und großem E_S/N_0 sind neben dem Nulldurchgang bei $\Delta\theta = 0$ innerhalb einer Periode noch mindestens zwei weitere Nulldurchgänge mit positiver Steigung zu beobachten, auf die der Regelkreis einrasten kann. Eine genauere Untersuchung offenbart, dass diese Eigenschaft für E_S/N_0 von mehr als ca. 14 dB vorliegt. Diese Punkte sind Nebenmaxima der Likelihoodfunktion. Ein Einrasten auf diese Nebenmaxima während der Einschwingphase kann prinzipiell nicht verhindert werden. Wird Daten-gestützte Phasenschätzung zur Anfangssynchronisation eingesetzt, tritt dieses Problem jedoch nicht auf. Einmal auf das Hauptmaximum synchronisiert, lässt sich in der Nachführphase ein Springen auf die Nebenmaxima relativ leicht verhindern, indem die Rauschbandbreite durch die Wahl eines genügend kleinen Wertes für γ hinreichend klein gemacht wird. Dann ist ein Überschreiten der zulässigen Regelablage nur bei kleinem E_S/N_0 wahrscheinlich, wo die S-Kurve nur noch einen Nulldurchgang mit positiver Steigung hat (s. Abb. 5-4 für $E_S/N_0 = 10$ dB), so dass das Problem insgesamt nicht mehr oder nur noch mit äußerst geringer Wahrscheinlichkeit auftritt. Für $E_S/N_0 > ca.14 \text{ dB}$ ist die maximal zulässige Regelabweichung auf etwa $\pm 0.1\pi$ entsprechend $\pm 18^{\circ}$ beschränkt. Die Steigung K_D der S-Kurve bei $\Delta \theta = 0$ beträgt auch hier exakt 1 bei Vernachlässigung des Rauschens und normiertem Symbolalphabet ($E[|a[k]|^2] = 1$). Dies gilt in guter Näherung auch für $E_S/N_0 > 14 \text{ dB}$.

Abschließend wollen wir noch den Phasenschätzfehler des Costas-Regelkreises mit der Cramer-Rao-Schranke (5-12) vergleichen. Als Maß für den Schätzfehler betrachten wir wieder die Wurzel aus der mittleren quadratischen Differenz zwischen dem Schätzwert $\hat{\theta}$ und dem exakten Wert θ (RMS-Fehler). Zwischen der normierten Rauschbandbreite $B_{\rm L}T$, dem Regelfaktor γ und dem Parameter L_0 zur Berechnung der Cramer-Rao-Schranke bedienen wir uns des Ergebnisses aus Kap. 3, Abschnitt 3.3.3:

$$L_{0} = \frac{1}{B_{\rm L}T} \left(= \frac{2}{K_{\rm D}\gamma} - 1 \text{ für } F(z) = 1 \right).$$
 (5-22)

Abb. 5-5 zeigt beispielhaft Ergebnisse von Simulationen für QPSK und 16-QAM bei einer Rauschbandbreite von $B_LT = 0.01$ und die zugehörigen Cramer-Rao-Schranken nach (5-12).

Bei QPSK liegt der Fehler oberhalb von $E_S/N_0 = 8 \text{ dB}$ praktisch auf der Cramer-Rao-Schranke. Der Schätzfehler ist selbst bei 0 dB noch kleiner als 10°. Die Wahrscheinlichkeit für Synchronisationsverlust kann nun abgeschätzt werden, indem man den RMS-Fehler als Standardabweichung σ einer Gauß-verteilten Zufallsvariablen auffasst und für diese die Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass die zulässige Regelabweichung von ±45° überschritten wird. Diese ist natürlich in erheblichem Maß abhängig vom E_S/N_0 . Nehmen wir beispielsweise ein sehr niedriges E_S/N_0 von 3 dB an, bei dem die Bitfehlerrate für QPSK bereits über 2% beträgt. Synchronisationsverlust tritt dann für das gewählte γ mit einer äußerst geringen Wahrscheinlichkeit von nur $P_V \approx 2 \cdot 10^{-29}$ auf. Man könnte γ also durchaus noch vergrößern, um Phasenänderungen schneller folgen zu können.



Abb. 5-5: Schätzfehler des Costas-Regelkreises in Abh. vom E_S/N_0 bei einer Rauschbandbreite von $B_L T = 0.01$ ($\gamma \approx 0.02$, $L_0 = 100$)

Bei 16-QAM ist der Schätzfehler bei 0 dB zwar ebenfalls kleiner als 10°, hat aber einen größeren Abstand zur Cramer-Rao-Schranke (Abb. 5-5, rechtes Bild). Aus Abb. 5-4 ist zu erkennen, dass die S-Kurven für $E_S/N_0 = 10$ dB über den gesamten dargestellten Bereich von ±45° ein korrektes Vorzeichen liefert. Dies gilt auch für $E_S/N_0 < 10$ dB. Für niedrige Signal-zu-Rauschleistungsverhältnisse kann somit der gesamte Bereich zur Regelung verwendet werden, so dass auch hier als maximale Regelabweichung ±45° angenommen werden kann. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit für ein Überspringen dieser Grenze in der gleichen Größenordnung wie bei PSK. Berücksichtigt man noch, dass 16-QAM mindestens 10 dB braucht, um bei der Demodulation eine Fehlerrate von unter 2% zu erreichen, könnte der Parameter γ auch für 16-QAM noch größer gewählt werden, ohne ein relevantes Risiko des Synchronisationsverlustes in Kauf nehmen zu müssen.

Was hier für 16-QAM diskutiert wurde, gilt in verstärktem Maß für noch höherwertigere Modulationskonstellationen. Die maximal zulässige Regelabweichung wird dann u.U. weiter eingeschränkt, aber die untere Grenze für E_S/N_0 , bei dem die Synchronisation noch betriebsfähig sein muss, steigt bei gleichbleibender Forderung an die Bitfehlerrate ebenfalls an.

Zusammenfassung der Eigenschaften des Costas-PLL:

- Er erreicht asymptotisch die Cramer-Rao-Schranke für hohes SNR,
- Die dynamischen und stationären Eigenschaften können durch die Wahl des Schleifenfilters festgelegt werden. Frequenzablagen (= Phasenrampen) können mit einem Filter mit den 7 Transformierten E(z)

mit der Z-Transformierten $F(z) = \frac{1}{z-1}$ vollständig ausgeregelt werden.

• Zusätzlich erforderlich ist Daten-gestützte Schätzung in Verbindung mit senderseitig eingestreuten Trainingsdaten zur Auflösung der Phasenmehrdeutigkeit – mindestens in der Phase der Anfangssynchronisation.

5.3 Daten-unabhängige aber Takt-gestützte Schätzung

v und τ sind bekannt, a[k] für $k = 1, 2, ..., L_0$ sind unbekannt.

Hier werden nur Vorwärts-Strukturen (ohne Rückkopplungen) betrachtet. Vorwärtsstrukturen haben stets eine kürzere Einschwingzeit als Strukturen mit Rückkopplungen.

1. M-PSK:

Ein Weg zur Eliminierung der Datenabhängigkeit besteht darin, die Werte $a^*[k]x[k]$ aus der Daten-gestützten Schätzung in (5-5) zur *M*-ten Potenz zu erheben. Bei *M*-PSK ist ja $a^M[k] = 1$. Dann wird allerdings auch der Phasenwinkel θ , der in den Werten x[k] enthalten ist, mit dem Faktor *M* multipliziert. Der Ansatz lautet also

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg\left\{\sum_{k=1}^{L_0} x^M \left[k\right]\right\}$$
(5-23)

Es lässt sich zeigen, dass dieser zunächst heuristische Ansatz sich tatsächlich aus dem Maximum-Likelihood-Ansatz für Daten-unabhängige Schätzung für große SNR ergibt. Entsprechend erreicht der Ansatz für große SNR asymptotisch die Cramer-Rao-Schranke. Auf die längliche Herleitung wird hier verzichtet.

Ein großer Nachteil dieses Ansatzes ist wie beim Costas-Regelkreis die *M*-fache Mehrdeutigkeit des Ergebnisses, die nur durch zusätzliche Trainingssymbole aufgelöst werden kann.

2. M-QAM

QAM-Signale weisen eine Rotationssymmetrie um Vielfache von $\pi/2$ auf. Man kann daher (5-23) für die Potenz M = 4 anwenden. Jedoch wird die Abhängigkeit des Phasenwinkels von den Symbolen für einige Symbolkonstellationen nicht vollständig eliminiert, was sich in einer irreduziblen Fehlervarianz äußert. Abb. 5-6 veranschaulicht das Szenario für 16-QAM. Nach der Potenzierung hoch 4 bleiben 4 Signalpunkte übrig, von denen jeder bei einer iid-Quelle mit der Wahrscheinlichkeit ¹/₄ vorkommt. Zwei Signalpunkte liegen auf dem negativen Teil der reellen Achse und geben den Winkel $4\theta + \pi$ wieder. Die beiden anderen Signalpunkte sind um etwa ±107° gedreht und tragen nichts zur Phasenschätzung bei. Da beide Signalpunkte symmetrisch zu der Achse $4\theta + \pi$ liegen, hebt sich ihr Einfluss auf die Winkelschätzung im Mittel auf, sofern L_0 hinreichend groß ist. Sie tragen jedoch zu einer Erhöhung der Varianz des Schätzfehlers bei.



Abb. 5-6: Abbildung einer 16-QAM-Konstellation auf deren 4-te Potenz im IQ-Diagramm

5.4 Takt- und Daten-unabhängige Schätzung

Nun ist nur v bekannt, τ und a[k] für $k = 1, 2, ..., L_0$ sind unbekannt.

Der ML-Ansatz mit diversen Vernachlässigungen führt für große SNR für M-PSK zum Ergebnis

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M} \arg \left\{ \int_{0}^{T_{0}} x^{M}(t) dt \right\}$$
(5-24)

Die Beziehung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit (5-23), jedoch ist hier der Einfluss der Intersymbol-Interferenz größer. Da der genaue Abtastzeitpunkt unbekannt ist, ist die Nyquist-Bedingung i.A. nicht mehr erfüllt.

Um zeitdiskrete Signalverarbeitung anwenden zu können, müssen wir das Signal x(t) abtasten. Zur Wahl der Abtastrate müssen wir die Bandbreite des Leistungsdichtespektrums (LDS) des Signals $x^{M}(t)$ betrachten. Das LDS von x(t) ist gegeben durch das Energiespektrum $|G(f)|^{2}$ des Modulationsimpulses g(t).

$$\begin{aligned} |G(f)| &\equiv 0 \quad \text{für} \quad |f| \ge \frac{1+\alpha}{2T} \\ \Rightarrow |X(f)| &\equiv 0 \quad \text{für} \quad |f| \ge \frac{1+\alpha}{2T} \\ \Rightarrow \left| \underbrace{X(f) * X(f) * \dots * X(f)}_{M \text{ Faltungen}} \right| &\equiv 0 \quad \text{für} \quad |f| \ge \frac{M(1+\alpha)}{2T} \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Abtastrate sollte mindestens

$$\frac{1}{T_A} \ge \frac{M\left(1+\alpha\right)}{T} \tag{5-25}$$

betragen, um das Shannon'sche Abtasttheorem zu erfüllen. Dann kann die Integration durch eine Summation ersetzt werden:

$$\int_{T_0} x^M(t) dt \approx \sum_{\substack{k=1\\ \text{Fehlersignal } e[k-NL_0]}}^{NL_0} x^M[k] .$$
(5-26)

Darin ist $N = T/T_A$ der Überabtastfaktor. Erfahrungsgemäß reicht die Wahl $N = T/T_A = M$ auch für $\alpha > 0$ aus.
6 Taktsynchronisation

Die Taktsynchronisation beinhaltet die Ermittlung der Symboldauer T und die Schätzung des relativen Abtastzeitpunktes τ , der oft auch einfach Abtastphase genannt wird. Der Synchronisationsvorgang wird in zwei Phasen unterteilt:

- 1. Schätzung der Abtastzeitpunkte $kT + \tau[k]$
- 2. Erzeugen der Abtastwerte zu den vorgegebenen Abtastzeitpunkten.

Man unterscheidet synchrone und asynchrone Abtastung. Der Begriff "synchron" bezieht sich hier auf den Abtasttakt. Unter synchroner Abtastung verstehen wir eine Abtastung im Symboltakt. Bei asynchroner Abtastung ist der Abtasttakt im Allgemeinen unabhängig vom Symboltakt. Man unterscheidet drei Strukturen gemäß Abb. 6-1 bis Abb. 6-3.



Abb. 6-1: Synchrone Abtastung mit analoger Abtastwerterzeugung



Abb. 6-2: Synchrone Abtastung mit hybrider Abtastwerterzeugung



Abb. 6-3:Asynchrone Abtastung mit digitaler Abtastwerterzeugung
a) Rückgekoppelte Schätzung,
b) Vorwärtsschätzung

Zur Takterzeugung aus analogen Steuersignalen (Abb. 6-1) wird ein VCO (Voltage Controlled Oscillator) eingesetzt, der üblicher Weise eine Sinusschwingung erzeugt. Deren Frequenz entspricht der Symbolrate und die Nulldurchgänge mit positiver Steigung entsprechen den geschätzten Abtastzeitpunkten.

Zur Takterzeugung aus digitalen Steuersignalen (Abb. 6-2) wird ein NCO (Number Controlled Oscillator) eingesetzt, der genau wie der VCO eine Sinusschwingung erzeugt, jedoch statt von einer Spannung von digital repräsentierbaren Zahlenwerten gesteuert wird.

In der voll-digitalen Realisierung (Abb. 6-3) erfolgt die Abtastung asynchron und die explizite Erzeugung eines Taktsignals im Symboltakt ist nicht mehr erforderlich. Die Abtastzeitpunkte $kT + \hat{\tau}[k]$ müssen nur in einer für den Interpolator handhabbaren Form digital dargestellt werden. Üblicher Weise erfolgt auch die matched Filterung digital. Das analoge Vorfilter hat dann nur noch die Aufgabe, die Leistung des Störsignals zu begrenzen (Rauschen und Nachbarkanalstörungen).

In diesem Kapitel fokussieren wir uns auf die Schätzung des optimalen Abtastzeitpunktes. Der zu schätzende Parameter ist $\lambda = \tau$. Die Frequenz ν wird als bekannt angenommen, d. h. $\hat{\nu} = \nu$.

Bzgl. der Symbolfolge wird unterschieden:

- 1. Daten-gestützte Schätzung (data aided estimation)
- 2. Entscheidungs-gestützte Schätzung (decision directed estimation)
- 3. Daten-unabhängige Schätzung (Non data aided estimation)

Außerdem unterscheidet man Vorwärtsschätzer und rekursive Schätzer.

Bei linearer Modulation hat das Empfangssignal hat die Form

$$r(t) = he^{j(2\pi\nu t+\theta)} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i]g(t-iT-\tau) + w(t).$$
(6-1)

Der Modulationsgrundimpuls muss zunächst nicht unbedingt die Nyquistbedingung erfüllen. Dort, wo die Nyquistbedingung erforderlich ist, wird es explizit angegeben.

6.1 Maximum-Likelihood-Ansatz für Daten-gestützte Schätzung

v, θ und a[k] für $k = 1, 2, ..., L_0$ werden als bekannt vorausgesetzt. Die perfekt angenommene Frequenzkorrektur erfolgt vor der Filterung. Grundlage der Taktschätzung ist das Ausgangssignal x(t) nach dem matched Filter. Zur Vereinfachung der Notation erweist sich die Annahme einer idealen Verstärkungsregelung (AGC) als zweckmäßig, so dass der Nutzanteil in x(t)unabhängig vom Kanalübertragungsfaktor h ist. Dann ist x(t) gegeben durch

$$x(t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi v\xi} g^{*}(\xi - t) d\xi$$

= $e^{j\theta} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - iT - \tau) g^{*}(\xi - t) d\xi + w'(t)$
= $e^{j\theta} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \rho_{gg}(t - iT - \tau) + w'(t)$ (6-2)

20.10.2016

Empfängersynchronisation

Darin ist

$$\rho_{gg}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \Delta t) g^{*}(t) dt$$
(6-3)

die Autokorrelationsfunktion des Modulationsgrundimpulses und w'(t) das Rauschsignal nach der matched Filterung und der Division durch h.

Wir wollen nun die Log-Likelihoodfunktion für $\tilde{\tau}$ aufstellen und analysieren, von welchen Parametern sie abhängt. Sie wurde in Kap. 3 bereits hergeleitet und ist bei perfekter Frequenzkorrektur in guter Näherung gegeben durch

$$\log L(\tilde{\tau} | \underline{u}) \approx \operatorname{Re}\left\{ e^{-j\theta} \sum_{k=1}^{L_0} a^* [k] x(kT + \tilde{\tau}) \right\}.$$
(6-4)

Das Ungefährzeichen erinnert daran, dass wir Effekte an den Rändern des Beobachtungsintervalls vernachlässigt haben. Mit x(t) aus (6-2) erhält man

$$\log L(\tilde{\tau} \mid \underline{u}) \approx \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{L_{0}} a^{*}[k] \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \rho_{gg}\left((k-i)T - \tau + \tilde{\tau}\right)\right\} + \frac{1}{h} \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{L_{0}} a^{*}[k]w'[k]\right\}$$
$$\approx \operatorname{Re}\left\{\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{L_{0}} \left|a[k]\right|^{2}\right)}_{=L_{0}} \rho_{gg}\left(\tilde{\tau} - \tau\right) + \sum_{l\neq 0} \rho_{aa}[l] \rho_{gg}\left(-lT - \tau + \tilde{\tau}\right)\right\} + \frac{1}{h} \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{L_{0}} a^{*}[k]w'[k]\right\}$$
. (6-5)

Darin ist

$$\rho_{aa}[l] = \sum_{k=1}^{L_0} a^*[k]a[k+l]$$
(6-6)

In (6-5) ergibt sich die zweite Zeile aus der ersten, indem man i = k + l substituiert und die Reihenfolge der Summation so ändert, dass die innere Summe über k und die äußere über lläuft. Ferner ist der Ausdruck für l = 0 herausgezogen worden. Die innere Summe ist durch $\rho_{aa}[l]$ abgekürzt worden und kann als (zeitdiskrete) aperiodische Autokorrelationsfunktion (AKF) der Trainingssequenz interpretiert werden. Gemäß (6-6) gehen in diese Werte aber auch Symbole ein, die außerhalb des Intervalls [1, L_0] liegen. Da es sich hier im Allgemeinen um Datensymbole handelt, die a priori nicht bekannt sind und als Zufallsvariablen betrachten werden müssen, tragen sie zur Störung bei.

Prinzipiell wird die Log-Likelihoodfunktion also sowohl von der AKF des Modulationsgrundimpulses als auch von der AKF der zeitlich begrenzten Trainingssequenz bestimmt. Man könnte jetzt Überlegungen zum Entwurf einer optimalen Trainingssequenz anstellen, deren AKF ein besonders ausgeprägtes Maximum der Log-Likelihoodfunktion liefert. Diese Überlegungen wollen wir jedoch nicht weiter vertiefen. Stattdessen wünschen wir uns von der Daten-AKF die Eigenschaft

$$\rho_{aa}\left[l\right] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = 0\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
(6-7)

und bezeichnen diese als ideale AKF. Damit wird der zweite Summenausdruck in (6-5) gleich Null.

Beschränken wir uns noch auf Symbole mit der konstanten Amplitude 1 (z.B. M-PSK), ergibt die erste Summe den Wert L_0 . Von praktischer Bedeutung sind ausschließlich Modulationsimpulse, deren AKFen reell sind. Für PSK und einem Modulationsimpuls mit einer reellwertigen AKF folgt für die Log-Likelihoodfunktion schließlich

$$\log L(\tilde{\tau} | \underline{u}) \approx L_0 \rho_{gg} (\tilde{\tau} - \tau) + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{L_0} \operatorname{Re}\left\{a^* [k] w'(kT + \tilde{\tau})\right\}.$$
(6-8)

Hier ist bewusst w[k] durch $w(kT + \tilde{\tau})$ ersetzt worden, um die Abhängigkeit des Rauschens von dem Abtastzeitpunkt $\tilde{\tau}$ sichtbar zu machen.

Für eine Trainingssequenz mit idealer AKF ist der Erwartungswert der Log-Likelihoodfunktion also allein durch die AKF des Modulationsgrundimpulses gegeben. Deren Maximum liegt immer bei $\tilde{\tau} = \tau$, wie von einer Log-Likelihoodfunktion zu erwarten ist. Für Nyquistimpulse klingt die AKF im ersten Symbolintervall monoton ab und wird Null für $|\tau - \tilde{\tau}| = T$. Damit hat die Log-Likelihoodfunktion ideale Eigenschaften zur Schätzung des optimalen Abtastzeitpunktes.

Die Summe über die Rauschwerte in (6-8) wird als Zufallsvariable aufgefasst, die wir mit W_{tot} bezeichnen wollen. Sie ergibt sich aus der Addition von L_0 reellwertigen Gauß'schen Zufallsvariablen mit gleicher Varianz. Da sich die Varianz bei komplexen Gauß'schen Zufallsvariablen zu gleichen Teilen auf Real- und Imaginärteil aufteilt, ist sie gegeben durch $\sigma_W^2 = N_0/(2T)/h^2$. Erfüllt die Impulsantwort des Empfangsfilters die Nyquistbedingung, sind die einzelnen Summanden unkorreliert und die Varianz der Summe ist gegeben durch $\sigma_{W_{\text{tot}}}^2 = L_0 \sigma_W^2$.

Wir fragen nun nach der praktischen Ermittlung des optimalen Wertes $\hat{\tau}$. Hierzu bietet sich eine Struktur nach Abb. 6-3b) an. Zunächst muss man beim Abtasten das Abtasttheorem einhalten, um alle Zwischenwerte interpolieren zu können.

Eine einfache Möglichkeit, das Maximum der Log-Likelihoodfunktion zu ermitteln, besteht darin, x(t) mit einer hohen Rate abzutasten, so dass eine gewünschte zeitliche Auflösung erreicht wird. Dann ermittelt man den Abtastwert mit der maximalen Amplitude. Soll der Schätzfehler z.B. 1/100 eines Symbolintervalls der Dauer *T* nicht überschreiten, muss die Abtastrate 50/*T* betragen. Die hohe Abtastung muss nicht unbedingt analog erfolgen. Man kann auch mit einer deutlich niedrigeren Rate abtasten und anschließend digital interpolieren (z.B. mittels einer diskreten Fouriertransformation (DFT) der Folge x[k], anschließender Einfügung von entsprechend vielen Nullen an den richtigen Stellen und Rücktransformation mit einer inversen DFT).

Der Signalverarbeitungsaufwand lässt sich signifikant reduzieren, indem die Abtastung von x(t) mit einer Rate erfolgt, die nur um einen kleinen aber ganzzahligen Faktor m höher ist als die Symbolrate. Aus einem Fenster der Länge L_0T werden L_0 Abtastwerte im Symbolabstand herausgenommen und die Log-Likelihoodwerte nach (6-4) für alle möglichen Fensterpositionen berechnet. Anschließend wird das Maximum der Log-Likelihoodwerte ermittelt. Die zugehörige Fensterposition stellt zwar eine grobe Schätzung der Zeitlage dar, ist i.A. aber noch nicht die genaue Lage des Maximums der Log-Likelihoodfunktion, da die Abtastzeitpunkte völlig willkürlich liegen. Zur genaueren Ermittlung dieses Maximums kann man ähnlich vorgehen wie bei der ML-Frequenzschätzung: Man legt ein Polynom zweiten Grades durch den

maximalen Log-Likelihoodwert und seiner zwei nächsten Nachbarwerte. Der Abszissenwert des Maximums dieses Polynoms ist geschlossen aus diesen drei Abtastwerten berechenbar. Diese Vorschrift wird im Folgenden an Hand von Abb. 6-4 hergeleitet. Wir bezeichnen die Log-Likelihoodfunktion abkürzend mit y(z), wobei $z = \tilde{\tau}/T_A$ zu setzen ist und $T_A = T/m$ das Abtastintervall darstellt.

Die Aufgabe besteht darin, den Parameter z₀ der Funktion

$$y(z) = y_0 - c \cdot (z - z_0)^2$$
(6-9)

zu bestimmen. Gegeben sind die 3 Werte y(-1), y(0) und y(1), von denen y(0) das Maximum darstellt. Daraus lassen sich 3 Gleichungen bilden, aus denen die 3 Unbekannten bestimmt werden können:

$$y(-1) = y_0 - c \cdot (1 + z_0)^2$$
, $y(0) = y_0 - c \cdot z_0^2$ und $y(1) = y_0 - c \cdot (1 - z_0)^2$.

Zunächst wird y_0 eliminiert:

$$y(0) - y(-1) = c \cdot (1 + z_0)^2 - c \cdot z_0^2, \ y(0) - y(1) = c \cdot (1 - z_0)^2 - c \cdot z_0^2.$$

Division der ersten Gleichung durch die zweite eliminiert a:

$$\frac{y(0) - y(-1)}{y(0) - y(1)} = \frac{(1 + z_0)^2 - z_0^2}{(1 - z_0)^2 - z_0^2} = \frac{1 + 2z_0}{1 - 2z_0}. \text{ Daraus folgt}$$

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{y(1) - y(-1)}{2y(0) - y(1) - y(-1)}. \tag{6-10}$$

Abb. 6-4: Interpolation durch ein Polynom 2. Grades

-1

0

+1

Nachdem y(0) das Maximum von den drei Abtastwerten y(-1), y(0) und y(+1) ist, muss z_0 zwischen -0.5 und +0.5 liegen.

Nähere Analysen lassen erkennen, dass i.A. eine Abtastung mit der Rate 2/T genügt, um eine ausreichende Schätzgenauigkeit zu erzielen. Für eine sehr hohe Genauigkeit reicht eine Rate von 4/T aber auf jeden Fall aus.

7

Die Forderung nach einem ganzzahligen Verhältnis von Abtastrate zur Symbolrate widerspricht der eigentlichen Intension hinter der asynchronen Abtastung, bei der möglichst ein freilaufender Oszillator verwendet werden soll. In der Tat kann man eine gewisse Toleranz ε_T für den Abtasttakt zulassen, so dass gilt

$$\frac{\left|T - mT_{\rm A}\right|}{T} \le \varepsilon_T \,. \tag{6-11}$$

Ein derartiger systematischer Fehler im Abtasttakt bewirkt, dass der optimale Abtastzeitpunkt $\hat{\tau}$ mit fortschreitender Zeit linear ansteigt oder abfällt. Will man den Schätzwert, der einmal aus der Trainingssequenz der Länge L_0 ermittelt wurde, zur Detektion einer Anzahl von N anschließenden Datensymbolen verwenden, beträgt der systematische Fehler zwischen dem ersten und dem letzten Symbol $(L_0+N)\varepsilon_T$. Dieser sollte kleiner sein als die geforderte Schätzgenauigkeit für $\hat{\tau}$. Aus dieser Bedingung resultiert unmittelbar eine Anforderung an die Toleranz des Oszillators für den Abtasttakt.

- 6-6 -

Um die Leistungsfähigkeit dieses Algorithmus zu bewerten, vergleichen wir den mittleren quadratischen Fehler wieder mit der modifizierten Cramer-Rao-Schranke. Diese ist gegeben durch

$$\mathrm{MCRB}\left(\frac{\tilde{\tau}}{T}\right) = \frac{1}{8\pi^2 T^2} \frac{1}{\xi L_0 \left(E_s / N_0\right)} \tag{6-12}$$

mit

$$\xi = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df}.$$
(6-13)

Für RRC-Impulse ist ξ eine Funktion von α gemäß der Beziehung

$$\xi = \frac{1}{12} + \alpha^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \right). \tag{6-14}$$

Einen Eindruck vom Verhalten des Schätzfehlers vermittelt die oberste Kurve für D = 0 in Abb. 6-5. Auffällig ist das Ausflachen für große E_S/N_0 . Die Ursache liegt in der Vernachlässigung der Effekte an den Rändern des Schätzintervalls durch die Annahme einer idealen AKF der Trainingssequenz. Der zweite Summenausdruck in (6-5) liefert einen irreduziblen Störterm, denn die Korrelationsfunktion der Trainingssequenz gemäß (6-6) ist für $l \neq 0$ in der Regel nicht Null, da sie von den angrenzenden Datensymbolen abhängt. Der Effekt lässt sich abmildern, indem man entweder die Trainingssequenz deutlich verlängert oder vor und nach der Trainingssequenz noch eine Anzahl von D bekannten Symbolen anfügt, die zwar nicht direkt in die Schätzung eingehen, aber zusammen mit der Trainingssequenz die gewünschte Eigenschaft $\rho_{aa}[l] = 0$ für $l \leq D$ erzeugen. In Abb. 6-5 sind die Ergebnisse für D = 1 und D = 2eingezeichnet. Offenbar führen bereits wenige Symbole zu einer signifikanten Reduktion der Störung. Allerdings bedeuten diese Symbole eine zusätzliche Redundanz, die in das Signal eingefügt wird, die nicht zur Datenübertragung genutzt werden kann.



Abb. 6-5: Standardabweichung des Zeitschätzfehlers in Abhängigkeit von E_S/N_0 für Datengestützte ML-Schätzung. D gibt die Anzahl zusätzlicher Symbole an, um die die Trainingssequenz an beiden Enden verlängert wird.

6.2 Entscheidungsgestützte Schätzung

Nur ν und θ werden als bekannt vorausgesetzt. Entscheidungsgestützte Schätzverfahren basieren auf rückgekoppelten Strukturen gemäß Abb. 6-2 und Abb. 6-3a). Für kohärente Demodulation erfordert dieser Ansatz auch die Kenntnis der Phase.

Wie bereits in Kap. 3, Abschnitt 3.3.3 ausgeführt wurde, wird in rückgekoppelten Anordnungen immer ein Fehlersignal e[k] benötigt, das ein Maß für die Abweichung vom optimalen Parameterwert τ darstellt. Die rekursive Schätzung erfolgt üblicher Weise nach der Vorschrift

$$\hat{\tau}[k+1] = \hat{\tau}[k] + \gamma e[k]. \tag{6-15}$$

Der Zusammenhang zwischen e[k] und dem Abtastfehler $\Delta \tau = \tau - \hat{\tau}$ wird - wie bei allen rekursiven Schätzern - durch die S-Kurve gegeben. Sie ist hier definiert durch

$$S(\Delta \tau) = \mathbf{E}[e[k] | \Delta \tau].$$
(6-16)

Dabei ist der Erwartungswert über das Rauschen und die Datensymbole zu nehmen. Das regelungstechnische Ersatzschaltbild, das für alle rekursiven Zeitschätzer gilt, zeigt Abb. 6-6. Das Schleifenfilter ist nicht unbedingt erforderlich. Es erlaubt jedoch eine weitere Optimierung des dynamischen und des stationären Verhaltens. Es ist daher in allen Blockschaltbildern der im Folgenden vorgestellten Schätzer enthalten.



Abb. 6-6: Regelungstechnisches Ersatzschaltbild eines rekursiven Zeitschätzers

Wir nehmen an, dass die Symbole aus einem normierten Symbolalphabet stammen und aufeinander folgende Symbole statistisch unabhängig voneinander sind, so dass gilt

$$\mathbf{E}\left[A^{*}\left[k\right]A\left[i\right]\right] = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k\\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}.$$
(6-17)

Aus der Literatur sind viele Vorschläge zur Erzeugung von e[k] bekannt, von denen hier nur die wichtigsten behandelt werden sollen.

6.2.1 Maximum Likelihood Detektor (MLD)

Wie bereits in Kap. 3, Abschnitt 3.3.3 ausgeführt wurde, ergibt sich ein geeignetes Fehlermaß für rekursive Schätzer, indem die Log-Likelihoodfunktion (6-4) mit $L_0 = 1$ nach dem zu schätzenden Parameter $\tilde{\tau}$ differenziert wird. Das Ergebnis lautet

$$\frac{e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{-j\hat{\theta}}\hat{a}^{*}[k]x'(kT + \hat{\tau}[k])\right\}}{(6-18)}$$

Darin sind $\hat{\nu}$ und $\hat{\theta}$ die Schätzwerte für die Frequenzablage und die Phase. Erst später werden wir diese durch die exakten Werte ersetzen. x'(t) ist gegeben durch

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi i \xi} g'^*(\xi - t) d\xi.$$
(6-19)

In (6-18) ist die Schätzhypothese $\tilde{\tau}$ durch den zum Zeitpunkt *k* tatsächlich verwendeten Schätzwert $\hat{\tau}[k]$ ersetzt worden. Zur Maximum Likelihood Schätzung des relativen Abtastzeitpunktes ist also neben der matched Filterung noch eine Filterung mit einem zweiten Filter erforderlich, dessen Impulsantwort sich gemäß (6-19) als differenzierte Impulsantwort des matched Filters darstellt. Die vollständige Struktur zeigt Abb. 6-7. Der Fehlerdetektor ermittelt aus geschätzten Datensymbolen $\hat{a}[k]$ und den Abtastwerten x'[k] den Fehlerwert e[k] nach (6-18).



Abb. 6-7: Blockschaltbild zur ML-Schätzung des relativen Abtastzeitpunktes bei synchroner Abtastung

(6-20)

Wir wollen nun den Einfluss der gesendeten Datensymbole auf das Fehlersignal e[k] genauer analysieren. Dazu vernachlässigen wir das Rauschen, und setzen zunächst (6-2) in (6-19) ein. Dies ergibt

$$x'(t) = -e^{j\theta} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi - iT - \tau) g'^*(\xi - t) d\xi}_{\rho_{gg}^{*}(iT + \tau - t)}.$$

Darin ist

die Ableitung der AKF des Modulationsimpulses nach der Zeit. Das negative Vorzeichen kann in das Argument der AKF hineingezogen werden, wenn man die allgemein gültige Symmetrieeigenschaft $\rho_{gg}(\tau) = \rho_{gg}^*(-\tau)$ einer komplexwertigen AKF berücksichtigt. Für deren Ableitung folgt $\rho_{gg}'(\tau) = -\rho_{gg}'^*(-\tau)$, so dass sich x'(t) in der Form

 $\rho_{gg}'(\tau) = \frac{d\rho_{gg}(\tau)}{d\tau} = \int_{0}^{\infty} \frac{dg(\xi+\tau)}{d\tau} g^{*}(\xi) d\xi.$

$$x'(t) = e^{j\theta} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \rho'_{gg} \left(t - iT - \tau\right)$$
(6-21)

darstellen lässt.

Dieses Zwischenergebnis setzen wir in (6-18) ein, wobei t durch $kT + \hat{\tau}[k]$ zu ersetzen ist, und erhalten

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\hat{a}^{*}[k]\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[i]\rho_{gg}'((k-i)T+\hat{\tau}[k]-\tau)\right\}.$$
(6-22)

Das Summenelement für i = k nimmt eine Sonderstellung ein und wird deshalb von der Summe isoliert. Für korrekte Symbolschätzung (d.h. $\hat{a}[k-1] = a[k-1]$ und $\hat{a}[k] = a[k]$) sowie $\hat{\theta} = \theta$ folgt

$$e[k] = \underbrace{\left|a[k]\right|^{2} \operatorname{Re}\left\{\rho_{gg}'\left(\hat{\tau}[k] - \tau\right)\right\}}_{\operatorname{Nutzanteil}} + \underbrace{\operatorname{Re}\left\{a^{*}[k]\sum_{\substack{i=-\infty\\i\neq k}}^{\infty}a[i]\rho_{gg}'\left((k-i)T + \hat{\tau}[k] - \tau\right)\right\}}_{\operatorname{Störanteil}}.$$
 (6-23)

Der erste Term in (6-23) stellt offensichtlich den Nutzanteil dar, denn bei der Erwartungswertbildung über die Datensymbole bleibt er allein übrig. Unter Annahme statistisch unabhängiger Symbole nach (6-17) folgt für die S-Kurve

$$S(\Delta \tau) = -\operatorname{Re}\left\{\rho_{gg}'(\Delta \tau)\right\} \operatorname{mit} \Delta \tau = \tau - \hat{\tau}[k]$$
(6-24)

Bei korrekter Symboldetektion ist die S-Kurve unabhängig vom Symbolalphabet und proportional zur Empfangsamplitude, aber unabhängig von der Rauschleistungsdichte N_0 . Ihre Form ist allein durch den Modulationsimpuls bestimmt. Entscheidungsfehler des Symboldetektors bewirken im Wesentlichen eine Reduktion der Amplitude der S-Kurve.



Abb. 6-8: S-Kurve für Wurzel-Cosinus-Impulse bei ML-Schätzung des Abtastzeitpunktes $\hat{\tau}$; Parameter: Roll-off-Faktor α .

Für Wurzel-Cosinus-Impulse zeigt Abb. 6-8 einige S-Kurven. Für Taktschätzung ist ein Regelbereich von $|\Delta \tau_{max}| = 0.5T$ ausreichend. Für diesen Bereich muss der Funktionswert das gleiche Vorzeichen wie das Argument $\Delta \tau$ haben, damit sich das Fehlermaß zur Taktschätzung eignet. Wurzel-Cosinus-Impulse erfüllen diese Forderung offensichtlich für einen weit größeren Bereich.

Für die Analyse des dynamischen Kleinsignalverhaltens ist die Steigung K_D der S-Kurve bei $\Delta \tau = 0$ eine wichtige Kenngröße, denn $\Delta \tau = 0$ ist der Arbeitspunkt im stationären Betrieb. Für ML-Schätzer ist sie gegeben durch

$$K_{\rm D} = -\operatorname{Re}\left\{\rho_{gg}''\left(\Delta\tau = 0\right)\right\}.$$
(6-25)

Für Wurzel-Cosinus-Impulse lässt sich eine geschlossene Darstellung der Form

$$K_{\rm D} = \alpha^2 \left(\pi^2 - 8\right) + \frac{\pi^2}{3} \tag{6-26}$$

angeben. Die Herleitung ist im Anhang H zu finden. Wir wollen nun den zweiten Term in (6-23) analysieren. Er stellt offensichtlich ein Störsignal mit zufälligem Charakter dar. Da dieser Anteil von den Datensymbolen vor und nach dem Zeitpunkt kT abhängt, wird er als Intersymbolinterferenz (ISI, oft auch als Eigeninterferenz oder Eigenrauschen) bezeichnet. Er verschwindet selbst zum idealen Abtastzeitpunkt $\hat{\tau}[k] = \tau$ nicht, da $\rho'_{gg}(lT)$ für $l \neq 0$ im Allgemeinen nicht verschwindet.



Abb. 6-9: Differenzierte AKF von Wurzel-Cosinus-Impulsen

Für Wurzel-Cosinus-Impulse zeigt Abb. 6-9 die differenzierte AKF über 6 Symbolintervalle. Die Werte für ganzzahlige Vielfache *l* des Symbolintervalls *T* stellen für $\hat{\tau}[k] = \tau$ die Gewichtsfaktoren dar, mit denen die Symbole a[k-l] in die Interferenz eingehen.

Der durch ISI verursachte mittlere quadratische Schätzfehler wird oft auch als irreduzibel bezeichnet, weil er sich durch Vergrößerung des Signal-zu-Rauschleistungsverhältnisses nicht reduzieren lässt.

Dennoch gibt es eine Möglichkeit, diesen scheinbar irreduziblen Anteil doch zu reduzieren, so dass der Begriff "irreduzibel" sich als etwas irreführend erweist. Um die ISI zu eliminieren, liegt es nahe zu versuchen, genau diesen Term vom Fehlersignal e[k] zu subtrahieren. Die dazu erforderlichen Datensymbole können wir durch die im Empfänger geschätzten Symbole ersetzen. Zur exakten Berechnung müsste aber die Differenz $\tau - \hat{\tau}[k]$ bekannt sein, was aber gerade die gesuchte Größe darstellt und daher a-priori unbekannt ist. Ein Weg aus dem Dilemma besteht darin, den Abtastfehler $\tau - \hat{\tau}[k]$ zu vernachlässigen. Dann sind nur die Werte der differenzierten AKF an den Stellen t = (k-i)T zu ermitteln, die ohne Schwierigkeiten im voraus berechenbar sind. Zumindest für den Zielwert $\hat{\tau}[k] = \tau$ ist die ISI dann vollständig eliminierbar.

Ein Problem ist noch die Summation über unendlich viele Terme. Glücklicher Weise klingt die differenzierte AKF mit zunehmendem Betrag der Indexdifferenz k-i bei den üblicher Weise verwendeten Modulationsimpulsen schnell ab, so dass nur wenige Werte um i = k herum signifikant zur Summe beitragen. Abb. 6-9 entnehmen wir, dass für Wurzel-Cosinus-Impulse mit $\alpha = \{0.75, 0.5, 0.25\}$ bereits $|l| \le \{1, 2, 5\}$ ausreichen dürfte, um die ISI deutlich zu reduzieren. Für praktische Anwendungen eignet sich somit als verbessertes Fehlermaß

$$e_{D}[k] = \operatorname{Re}\left\{ \hat{a}^{*}[k] \left(e^{-j\hat{\theta}} x'[k] - \sum_{\substack{l=-D\\l\neq 0}}^{D} \hat{a}[k-l] \rho'_{gg}(lT) \right) \right\}.$$
 (6-27)

Für D = 0 ergibt sich als Sonderfall der ursprüngliche Ansatz nach (6-18). Für D > 0 ist zu berücksichtigen, dass der Fehlerwert immer nur mit einer Verzögerung von D Symbolen berechnet werden kann. Das ist aber als unkritisch einzustufen, da sich τ innerhalb von D Symbolen üblicher Weise nicht signifikant verändert.

Abb. 6-10 zeigt Ergebnisse von Simulationen, wobei jeder Punkt sich aus einer Mittelung über ca. 10⁶ Symbole ergibt. Dargestellt ist der mittlere Schätzfehler in Abhängigkeit von E_S/N_0 im Vergleich zur modifizierten Cramer-Rao-Schranke (MCRB). Mit dem mittleren Schätzfehler bezeichnen wir – wie immer – die Wurzel aus dem mittleren quadratischen Fehler bzw. die Standardabweichung der Differenz $\tau - \hat{\tau}$. Linkes und rechtes Bild unterscheiden sich durch den Roll-off-Faktor α . Man erkennt für D = 0 das typische Ausflachen der Kurven für hohes E_S/N_0 , was durch die ISI in Form des Summenterms in (6-23) verursacht wird.



Abb. 6-10: Mittlerer Schätzfehler des relativen Abtastzeitpunktes beim MLD für QPSK mit Wurzel-Cosinus-Impulsen und einer äquivalenten Rauschbandbreite von $B_LT = 0.01$

Eine genauere Betrachtung beider Graphiken lehrt:

- 1. Die Cramer-Rao-Schranke wird für hinreichend großes E_S/N_0 erreicht. Mit abnehmenden E_S/N_0 wird der Abstand zur MCRB immer größer. Grund dafür ist hauptsächlich eine wachsende Anzahl von fehlerhaften Symbolentscheidungen.
- 2. Für kleinere Roll-off-Faktoren wird die irreduzible Fehlervarianz größer. Dies ist durch das langsamere Abklingen der AKF des Modulationsgrundimpulses und deren Ableitung zu erklären. Damit tragen mehr Terme zur Eigeninterferenz bei.
- 3. Bei einem Roll-off-Faktor von $\alpha = 0.5$ reichen bereits D = 2 Datensymbole vor und nach dem Zeitpunkt kT aus, um die Eigeninterferenz zu kompensieren.
- 4. Für kleinere Roll-off-Faktoren ist ein größeres D (D = 4 bei $\alpha = 0.25$) erforderlich, um die Eigeninterferenz zu kompensieren.

Der mittlere Schätzfehler ist weitgehend unabhängig vom Modulationsalphabet. Nur die Standardabweichung der Eigeninterferenz ist bei BPSK um den Faktor $\sqrt{2}$ größer. Dies liegt daran, dass in das Fehlersignal e[k] gemäß (6-23) nur der Realteil des Störterms eingeht. Bei BPSK liefert der Störterm nur reelle Werte (jedenfalls für eine reellwertige AKF), so dass die gesamte Störleistung dieser Summe wirksam ist. Bei allen anderen Modulationsarten wird die Störleistung im Mittel gleichmäßig auf Real- und Imaginärteil aufgeteilt, so dass nur die Hälfte der gesamten Störleistung wirksam ist. Bezüglich der Standardabweichung entspricht dies einem Unterschied um den Faktor $\sqrt{2}$.

Bei der ML-Schätzung, die wir bisher betrachtet haben, erweist es sich als nachteilig, dass zwei Filterungen vor der Abtastung durchgeführt werden müssen, was gegenüber einer einfachen matched Filterung doppelten Implementierungsaufwand bedeutet. Im Folgenden werden verschiedene sub-optimale Varianten vorgestellt, die eine zweite analoge Filterung vermeiden und nur auf Abtastwerte nach dem matched Filter im Symboltakt bzw. im halben Symboltakt zurückgreifen.

6.2.2 Early-Late-Detektor (ELD)

Beim Early-Late-Detektor nach Abb. 6-11 wird der Differentialquotient in (6-18) durch die Differenz von Abtastwerten des matched-Filter-Ausgangssignals x(t) vor (early) und nach (late) dem Zeitpunkt kT approximiert. Als Zeitversatz wird T/2 verwendet. Dies erfordert also eine Abtastung im doppelten Takt der Symbolrate, vermeidet aber die zweite analoge Filterung. Abb. 6-11 zeigt die Struktur.



Abb. 6-11: Blockschaltbild des Entscheidungs-gestützten Early-Late Detektors (DD-ELD)

Der Block ,Demux' bezeichnet einen Demultiplexer, der jeden zweiten Abtastwert an den Datendetektor und die dazwischen liegenden Werte an den Fehlerdetektor weiterleitet. Der Fehlerdetektor führt folgende Rechenvorschrift aus:

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{-j\hat{\theta}}\hat{a}^{*}[k]\left[x\left(kT + \frac{T}{2} + \hat{\tau}[k]\right) - x\left(kT - \frac{T}{2} + \hat{\tau}[k-1]\right)\right]\right\}.$$
(6-28)

Wir wollen nun den Einfluss der Datensymbole auf das Fehlermaß analysieren und die S-Kurve ermitteln. Dazu setzen wir $\hat{\tau}[k-1] = \hat{\tau}[k]$ und substituieren x(.) durch (6-2) sowie *i* durch k-l und erhalten

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\hat{a}^{*}[k]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty}a[k-l]\left(\rho_{gg}\left(lT+\frac{T}{2}-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left(lT-\frac{T}{2}-\Delta\tau\right)\right)\right]\right\}$$
(6-29)

Das Summenelement für l = 0 spielt wieder eine Sonderrolle und wird deshalb von der Summe isoliert. Für korrekte Daten- und Phasenschätzung ist e[k] in der Form

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left| a[k] \right|^{2} \begin{pmatrix} \rho_{gg} \left(\frac{T}{2} - \Delta \tau \right) \\ -\rho_{gg} \left(-\frac{T}{2} - \Delta \tau \right) \end{pmatrix} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ \hat{a}^{*}[k] \sum_{l \neq 0} a[k-l] \begin{pmatrix} \rho_{gg} \left(lT + \frac{T}{2} - \Delta \tau \right) \\ -\rho_{gg} \left(lT - \frac{T}{2} - \Delta \tau \right) \end{pmatrix} \right\}$$
(6-30)
Nutranteil

darstellbar. Der erste Term ist offensichtlich wie beim MLD der Nutzanteil, denn bei der Erwartungswertbildung über die Datensymbole bleibt er allein übrig. Unter Annahme statistisch unabhängiger Symbole nach (6-17) sowie eines normierten Symbolalphabets ($E[|a[k]|^2] = 1$) ergibt sich die S-Kurve aus

$$S(\Delta \tau) = \left(\rho_{gg}\left(\frac{T}{2} - \Delta \tau\right) - \rho_{gg}\left(-\frac{T}{2} - \Delta \tau\right)\right).$$
(6-31)

Abb. 6-12 veranschaulicht die Wirkungsweise des Schätzers. Für exakte Zeitschätzung, d.h. $\hat{\tau} = \tau$ ist S(.) = 0. Für $\Delta \tau > 0$ ($\hat{\tau}$ zu klein geschätzt) entsteht eine Verschiebung der Abtastwerte der AKF nach links, was den Abtastwert bei $T/2 - \Delta \tau$ größer und den anderen kleiner werden lässt \Rightarrow positives Fehlermaß $\Rightarrow \hat{\tau}[k+1] = \hat{\tau}[k] + \gamma e[k]$ wird größer.



Abb. 6-12: Veranschaulichung der Wirkungsweise des ELD-Fehlermaßes: AKF eines Modulationsimpulses mit idealen und fehlerhaften Abtastzeitpunkten

Die S-Kurven des Early-Late-Detektors für einige Wurzel-Cosinus-Impulse sind in Abb. 6-13 dargestellt. Sie sind denen des ML-Detektors sehr ähnlich, was den Schluss zulässt, dass die Approximation des Differenzialquotienten durch die Differenz zweier Werte im Abstand T gar nicht so schlecht ist.

Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist unter Berücksichtigung der Punktsymmetrie der differenzierten AKF allgemein gegeben durch

$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{\rm gg}(-T/2).$$
(6-32)



Abb. 6-13: S-Kurven für Wurzel-Cosinus-Impulse für den Early-Late-Detektor; Parameter: Roll-off-Faktor α.

Für Wurzel-Cosinus-Impulse ist K_D als Funktion von α geschlossen in der Form

$$K_{\rm D} = 4\alpha \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{1-\alpha^2} + \frac{8}{\pi} \left(1-3\alpha^2\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\left(1-\alpha^2\right)^2} \tag{6-33}$$

darstellbar (s. Anhang H). Die Abhängigkeit von α ist ziemlich kompliziert und nur schwer zu durchschauen. Eine numerische Berechnung offenbart jedoch nur eine relativ geringe Abhängigkeit, wie man aus den S-Kurven in Abb. 6-13 bereits erahnen kann. K_D liegt zwischen $8/\pi \approx 2.54$ für $\alpha = 0$ und 3 für $\alpha = 1$ und steigt monoton mit α an.

Wie der MLD erzeugt auch der ELD Intersymbolinterferenz, die in Form des zweiten Terms in (6-30) zum Ausdruck kommt. Wegen des Zufallscharakters der Datensymbole ist auch diese Störung zufällig, wobei die Amplitude des *l*-ten Summenelements im Wesentlichen durch die Differenz der Abtastwerte der AKF vor bzw. nach dem Zeitpunkt *lT* bestimmt ist, die selbst für den Zielwert $\hat{\tau} = \tau$ nicht verschwindet. Für $l = \pm 1$ und ± 2 kann diese Differenz sogar noch relativ groß sein. Folglich wird der mittlere Schätzfehler zu großen E_S/N_0 -Werten hin ausflachen. Wie beim MLD kann man auch hier zumindest für den Zielwert die ISI vollständig unterdrücken, indem man sie für $\Delta \tau = 0$ berechnet und subtrahiert, wobei man die gesendeten durch die geschätzten Datensymbole ersetzt. Als verbessertes Fehlermaß für den ELD eignet sich somit

$$e_{D}[k] = e[k] - \operatorname{Re}\left\{ \hat{a}^{*}[k] \sum_{\substack{l=-D\\l\neq 0}}^{D} \hat{a}[k-l] \left(\rho_{gg} \left(lT + T/2 \right) - \rho_{gg} \left(lT - T/2 \right) \right) \right\}$$
(6-34)

mit *e*[*k*] aus (6-28).

In Abb. 6-21 sind Simulationsergebnisse für den Early-Late-Detektor für Phasenmodulation dargestellt. Interessant ist, dass trotz der relativ groben Näherung, nämlich das Differenzial dx durch die Differenz zweier relativ weit auseinander liegender Abtastwerte zu ersetzen, die Cramer-Rao-Schranke nahezu erreicht wird. Die Kurven sind in der Tat nur geringfügig

schlechter als die des MLDs. Der ELD ist auf Grund seiner geringeren Implementierungskomplexität daher vorzuziehen.

Für 16-QAM sehen die Ergebnisse ähnlich aus mit dem einen Unterschied, dass unterhalb von etwa 15 dB der mittlere Fehler um bis zu 15% über der Cramer-Rao-Schranke liegt. Die Unterdrückung der ISI ist aber dort genau so wirksam wie bei *M*-PSK, d.h. oberhalb von ca. 15 dB gelten die Kurven in guter Näherung auch für 16-QAM.



Abb. 6-14: Mittlerer Schätzfehler des relativen Abtastzeitpunktes beim ELD für Wurzel-Cosinus-Impulse und M-PSK für M>2. (Für BPSK liegen die horizontalen Asymptoten für den irreduziblen Schätzfehler um den Faktor √2 höher.)

6.2.3 Nulldurchgangsdetektor (ZCD = Zero Crossing Detector)

Aus der Basisbandübertragung stammt die zunächst heuristisch geborene Idee, die Nulldurchgänge des Empfangssignals zu beobachten und die Differenz zu den Nulldurchgängen des VCO-Signals als Fehlersignal zu verwenden. Fehlerdetektoren, die auf diesem Prinzip basieren, nennt man Nulldurchgangsdetektoren.

In dem Signalbeispiel nach Abb. 6-15 ist zweistufige Pulsamplitudenmodulation (PAM) angenommen. Das Fehlersignal e(t) ist ein Rechtecksignal, dessen positive Flanken die Zeitpunkte der Nulldurchgänge des Empfangssignals darstellen und dessen negative Flanken identisch zu denen des NCOs sind. Die Impulsbreite ist also ein Maß für den Taktversatz. Nun tritt ein Nulldurchgang im Empfangssignal nur bei einem Symbolwechsel auf, was zur Folge hat, dass es nicht zu jedem Symbol einen Impuls gibt. Bei statistisch unabhängigen und gleich verteilten Symbolen ist im Mittel nur zu jedem zweiten Symbol ein Fehlersignal verfügbar. Das Fehlersignal kann man zerlegen in einen periodischen Anteil (unterstes Signal in Abb. 6-15) und einen aperiodischen Anteil. Der Gleichanteil des periodischen Anteils ist ein Maß für das Impulsbreitenverhältnis und damit auch für den Taktversatz. Durch ein hinreichend schmalbandiges Filter lässt sich dieser Gleichanteil herausfiltern.



Abb. 6-15: Signalbeispiel für Nulldurchgangsdetektor: Das untere Signal ist der periodische Anteil in e(t)

Dieses Prinzip lässt sich auf mehrstufige trägerfrequente Übertragung verallgemeinern, indem man einen Nulldurchgang durch einen Symbolwechsel ersetzt. Im äquivalenten Basisband lautet das Fehlersignal

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left(\hat{a}^{*}[k-1] - \hat{a}^{*}[k] \right) e^{-j\hat{\theta}} x \left(kT - T / 2 + \hat{\tau}[k] \right) \right\}$$
(6-35)

Offensichtlich ist e[k] nur dann verschieden von Null, wenn ein Symbolwechsel stattfindet, also $\hat{a}[k-1] \neq \hat{a}[k]$ gilt.

Die Struktur des Regelkreises mit Nulldurchgangsdetektor ist identisch mit dem des Early-Late Detektors nach Abb. 6-11. Unterschiedlich ist nur die Berechnung von e[k], die nun nach (6-35) erfolgt.

Zur Analyse des Fehlermaßes nach (6-35) substituieren wir wieder x(.) durch (6-2) sowie i = k-l. Dann ist e[k] ist in der Form

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left(\hat{a}^{*}[k-1] - \hat{a}^{*}[k] \right) e^{j(\theta-\hat{\theta})} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a[k-l] \rho_{gg} \left(lT - \frac{T}{2} - \Delta \tau \right) \right\}$$
(6-36)

darstellbar. Hier nehmen die Summenelemente für l = 0 und l = 1 eine Sonderstellung ein. Isoliert man sie von den übrigen Summenelementen, folgt für korrekte Symbolschätzung (d.h. $\hat{a}[k-1] = a[k-1]$ und $\hat{a}[k] = a[k]$) sowie $\hat{\theta} = \theta$

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left(\left| a[k-1] \right|^{2} - a^{*}[k]c[k-1] \right) \rho_{gg} \left(T/2 - \Delta \tau \right) \right\} - \operatorname{Re}\left\{ \left(\left| a[k] \right|^{2} - a[k]a^{*}[k-1] \right) \rho_{gg} \left(-T/2 - \Delta \tau \right) \right\} + \operatorname{Re}\left\{ \left(a^{*}[k-1] - a^{*}[k] \right) \sum_{l \notin \{0,1\}} a[k-l] \rho_{gg} \left(lT - T/2 - \Delta \tau \right) \right\}$$

$$(6-37)$$

Für Symbolkonstellationen mit konstanter Amplitude wie z.B. PSK sind die Ausdrücke in den runden Klammern der ersten beiden Zeilen gerade konjugiert komplex zueinander, haben also denselben Realteil. Bei reellwertiger AKF kann dieser als gemeinsamer Faktor herausgezogen werden. Für *M*-PSK und reellwertiger AKF gilt also

$$e[k] = \left(1 - \operatorname{Re}\left\{a^{*}[k]a[k-1]\right\}\right) \left(\rho_{gg}\left(\frac{T}{2} - \Delta\tau\right) - \rho_{gg}\left(-\frac{T}{2} - \Delta\tau\right)\right) + \operatorname{Re}\left\{\left(a^{*}[k-1] - a^{*}[k]\right)\sum_{l \notin \{0,1\}} a[k-l]\rho_{gg}\left(lT - \frac{T}{2} - \Delta\tau\right)\right\}\right\}.$$
(6-38)

Für korrekt geschätzte Datensymbole ergibt sich für normierte Symbolalphabete und statistisch unabhängige Symbole dieselbe S-Kurve wie für den ELD gemäß (6-31). Die prinzipielle Wirkungsweise ist beim ZCD und beim ELD daher gleich.

Der wesentliche Unterschied zum ELD besteht in der Größe der ISI, die beim ZCD im Wesentlichen durch die Summe in der letzten Zeile in (6-37) zum Ausdruck kommt. Diese erzeugt wieder das typische Ausflachen der Fehlerkurven wie es in Abb. 6-16 sichtbar ist, jedoch auf einem wesentlich niedrigerem Niveau, jedenfalls für PSK (vgl. Abb. 6-14). Die ISI nimmt jedoch erheblich zu, wenn die Amplitude der Symbole nicht konstant ist, wie z.B. für 16-QAM (s. rechtes Bild). Wenn man sich aber den Ausdruck der Eigeninterferenz in (6-37) genauer anschaut, lässt sich diese nach der bewährten Methode zumindest für $\Delta \tau = 0$ auch hier subtrahieren, so dass als verbessertes Fehlermaß für den ZCD folgt

$$e_{D}[k] = e[k] - \operatorname{Re}\left\{ \left(\hat{a}^{*}[k-1] - \hat{a}^{*}[k] \right) \sum_{\substack{l=-D\\ l \notin \{0,1\}}}^{D+1} \hat{a}[k-l] \rho_{gg} \left(lT - T/2 \right) \right\}$$
(6-39)

mit *e*[*k*] aus (6-35).

Abb. 6-16 zeigt Simulationsergebnisse für den Nulldurchgangsdetektor für PSK (linkes Bild) und 16-QAM (rechtes Bild). Auch er erreicht nahezu die Cramer-Rao-Schranke. Das Verhalten der Kurven ähnelt denen des ELD mit einem wesentlichen Unterschied: Bei PSK ist für D = 0 die Eigeninterferenz signifikant geringer, so dass man i.A. mit dem einfachen Fehlersignal nach (6-35) ohne ISI-Korrektur auskommt. Bei 16-QAM wird die Eigeninterferenz des ZCD allerdings deutlich größer, liegt aber immer noch etwas unter der Eigeninterferenz des ELD. Allerdings ist die Wirkung des verbesserten Fehlersignals nach (6-39) deutlich eingeschränkt. Dies liegt daran, dass bei Symbolalphabeten mit Amplitudenvariationen ein Teil der Eigeninterferenz durch die ersten beiden Terme in (6-37) verursacht wird, denn es kommt häufig vor, dass |a[k]| nicht gleich |a[k-1]| ist. Dadurch wird der Regelmechanismus erheblich gestört. Kompensiert wird mit (6-39) aber nur der dritte Term in (6-37).

Nachteilig am ZCD und am ELD ist, dass mit doppelter Symbolrate abgetastet werden muss. Diesen Nachteil vermeidet der nächste Detektor.



Abb. 6-16: Mittlerer Schätzfehler des relativen Abtastzeitpunktes beim ZCD für Wurzel-Cosinus-Impulse.

6.2.4 Müller & Müller-Detektor (MMD)

Der Müller & Müller Detektor verwendet als Fehlermaß

$$\frac{e[k] = \operatorname{Re}\left\{\left(\hat{a}^{*}[k-1]x(kT+\hat{\tau}[k]) - \hat{a}^{*}[k]x(kT-T+\hat{\tau}[k-1])\right)e^{-j\hat{\theta}}\right\}.$$
 (6-40)

Hier ist nur noch Abtastung im Symboltakt erforderlich. Abb. 6-17 zeigt das Blockschaltbild.





Auch für diesen Detektor wollen wir das Fehlersignal genauer analysieren. Dazu setzen wir wieder $\hat{\tau}[k-1] = \hat{\tau}[k]$ und substituieren x(.) durch (6-2) sowie i = k-l. Wir erhalten

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})} \begin{pmatrix} \hat{a}^{*}[k-1]\sum_{l=-\infty}^{\infty}a[k-l]\rho_{gg}(lT-\tau+\hat{\tau}[k]) \\ -\hat{a}^{*}[k]\sum_{l=-\infty}^{\infty}a[k-l]\rho_{gg}((l-1)T-\tau+\hat{\tau}[k]) \end{pmatrix}\right\}.$$
 (6-41)

Sync6Takt.doc

Die Summenelemente für l = 0 und l = 1 nehmen wieder eine Sonderstellung ein und werden deshalb von den übrigen Summenelementen isoliert. Für korrekte Symbolschätzung (d.h. $\hat{a}[k-1] = a[k-1]$ und $\hat{a}[k] = a[k]$) sowie $\hat{\theta} = \theta$ kann e[k] in der Form

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left| a[k-1] \right|^{2} \rho_{gg} \left(T - \Delta \tau \right) \right\} - \operatorname{Re}\left\{ \left| a[k] \right|^{2} \rho_{gg} \left(-T - \Delta \tau \right) \right\} + 2 \operatorname{Im}\left\{ a^{*}[k] a[k-1] \right\} \operatorname{Im}\left\{ \rho_{gg} \left(-\Delta \tau \right) \right\} + \operatorname{Re}\left\{ a^{*}[k-1] \sum_{l \notin \{0,1\}} a[k-l] \rho_{gg} \left(lT - \Delta \tau \right) - a^{*}[k] \sum_{l \notin \{0,1\}} a[k-l] \rho_{gg} \left((l-1)T - \Delta \tau \right) \right\} \right\}$$
(6-42)

dargestellt werden. Die Differenz der ersten beiden Terme stellt den Nutzanteil dar. Für Symbolkonstellationen mit konstantem Betrag ist sie gegeben durch die Differenz der AKF-Werte um *T* vor bzw. nach dem Zeitpunkt $\Delta \tau$. Hier gehen also Abtastwerte der AKF ein, die 2 Symbolintervalle auseinander liegen. Abb. 6-18 veranschaulicht die Wirkungsweise, die ähnlich zu der des ELD ist, nur die Abtastwerte und die Differenzen bei gleicher Schätzablage $\Delta \tau$ sind tendenziell kleiner.

Der dritte Term spielt i.A. keine Rolle, da die AKF üblicher Modulationsimpulse rein reell ist.

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Für normierte Symbolalphabete und statistisch unabhängige Symbole folgt

$$S(\Delta \tau) = \rho_{gg} \left(T - \Delta \tau \right) - \rho_{gg} \left(-T - \Delta \tau \right).$$
(6-43)

Die S-Kurven für einige Wurzel-Cosinus-Impulse sind in Abb. 6-19 zu sehen.



Abb. 6-18: Veranschaulichung des MMD-Fehlermaßes: AKF eines Modulationsimpulses mit idealen (bei -T und +T) und fehlerhaften Abtastzeitpunkten

Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist unter Berücksichtigung der Punktsymmetrie der differenzierten AKF gegeben durch

$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{gg}(-T).$$
(6-44)

Für Wurzel-Cosinus-Impulse ist K_D als Funktion von α wieder geschlossen darstellbar:

$$K_{\rm D} = 2 \frac{\cos \pi \alpha}{1 - 4\alpha^2}.\tag{6-45}$$

20.10.2016



 $K_{\rm D}$ liegt zwischen 2 für $\alpha = 0$ und 2/3 für $\alpha = 1$ und fällt mit zunehmendem α monoton ab.

Abb. 6-19: S-Kurven für Wurzel-Cosinus-Impulse für den Müller & Müller-Detektor; Parameter: Roll-off-Faktor α.

Die Leistungsfähigkeit des M&M-Detektors wird im nächsten Abschnitt im Vergleich mit den anderen Detektoren vorgestellt und diskutiert.

6.2.5 Leistungsvergleich der Entscheidungs-gestützten Taktschätzer

Abb. 6-20 und Abb. 6-21 zeigen die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Schätzverfahren ohne ISI-Korrektur (D = 0) im Vergleich zueinander. Die oberen Bilder sind für *M*-PSK und stehen stellvertretend für Symbolalphabete mit konstanter Amplitude. Die unteren Bilder stellen Ergebnisse für 16-QAM dar.



Abb. 6-20: Mittlerer Schätzfehler des Abtastzeitpunktes für Entscheidungs-gestützte Schätzverfahren; hier: *M*-PSK, Wurzel-Cosinus-Impulse



Abb. 6-21: Mittlerer Schätzfehler des Abtastzeitpunktes für Entscheidungs-gestützte Schätzverfahren; hier: 16-QAM, Wurzel-Cosinus-Impulse.

Zusammenfassend lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Beim ELD und ZCD flachen die Kurven für große E_S/N_0 aus.
 - Der asymptotische Grenzwert auf Grund von ISI nimmt mit abnehmendem Rolloff-Faktor zu.
 - Bei PSK ist der ZCD dem ELD deutlich überlegen (jedenfalls ohne Kompensation der ISI, d.h. für D = 0).
 - Beim ELD ist die ISI unabhängig vom Modulationsalphabet. Beim ZCD ist sie von der Amplitudenvariation des Symbolalphabets abhängig, wird aber nie größer als beim ELD, sofern die Eigeninterferenz nicht kompensiert wird (D = 0).
 - Für M-QAM und Anwendung der ISI-Kompensation ist der ELD unschlagbar.
- Der MMD weist dagegen kein Ausflachen auf. Die Erklärung ist in dem Summenterm in der letzten Zeile von (6-42) zu suchen, der die ISI beschreibt. Während beim ELD und ZCD AKF-Werte an halbzahligen Vielfachen des Symboltaktes eingehen, gehen beim MMD nur Werte in ganzzahligen Vielfachen ein. Wegen der Nyquist-Eigenschaft des Modulationsimpulses konvergieren diese für kleine Zeitschätzfehler gegen Null.
- Als Nachteil des MMD ist hinzunehmen, dass die Fehlervarianz für größere Werte α einen zunehmenden Abstand von der Cramer-Rao-Schranke aufweist, was insbesondere bei kleinem E_S/N_0 signifikant ist.

6.3 Datenunabhängige Schätzung (NDA = Non Data Aided)

Voraussetzung: $\hat{v} = v$, θ und a[k] unbekannt.

Ansatz: Maximum-Likelihood-Funktion aus (3-51) mit (3-52)

$$L(\tilde{\tau}, \tilde{\theta}, \underline{\tilde{a}}) \approx \exp\left\{\frac{2h}{N_0} \operatorname{Re}\left\{e^{-j\tilde{\theta}} \sum_{k=1}^{L_0} \tilde{a}^*[k] x(kT + \tilde{\tau})\right\}\right\}.$$
(6-46)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) e^{-j2\pi i \xi} g^*(\xi - t) dt .$$
 (6-47)

Über L(.) ist nun der Erwartungswert zunächst über die Phasenhypothesen $\tilde{\theta}$ und dann über die Datensymbole $\underline{\tilde{a}}$ zu nehmen. (Achtung! In das Integral zur Erwartungswertberechnung muss natürlich die Likelihood-Funktion L(.) selbst eingesetzt werden und nicht etwa log L(.)).

Zur Erwartungswertbildung über $\tilde{\theta}$ schreiben wir die Summe in (6-46) als eine einzige komplexe Zahl $|\xi|e^{j\psi}$:

$$L(\tilde{\tau}, \underline{\tilde{a}}) \approx \mathbf{E}_{\tilde{\theta}} \left[\exp\left\{ \frac{2}{N_0} \operatorname{Re}\left\{ e^{-j\tilde{\theta}} \left| \boldsymbol{\xi} \right| e^{j\boldsymbol{\psi}} \right\} \right\} \right]$$
$$\approx \mathbf{E}_{\tilde{\theta}} \left[\exp\left\{ \frac{2|\boldsymbol{\xi}|}{N_0} \cos\left(\boldsymbol{\psi} - \tilde{\theta}\right) \right\} \right].$$
(6-48)

Setzt man für $\tilde{\theta}$ eine Gleichverteilung von $-\pi$ bis $+\pi$ an, erhält man

$$L(\tilde{\tau},\underline{\tilde{a}}) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{\frac{2h}{N_0} |\xi| \cos\left(\psi - \tilde{\theta}\right)\right\} d\tilde{\theta} = \frac{1}{2\pi} I_0\left(\frac{2h}{N_0} |\xi|\right)$$
(6-49)

mit I₀(.) als modifizierte Besselfunktion der Ordnung 0.

Nun muss noch der Erwartungswert über die Datensymbole $\tilde{a}[k]$ gebildet werden. Dieser ist jedoch nicht exakt berechenbar. Zur näherungsweisen Berechnung stellen wir die Besselfunktion in Form ihrer Taylorreihe dar und brechen die Reihe nach dem quadratischen Term ab. Es gilt

$$I_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{2^{2i}i!(i+1)!} \approx 1 + \frac{x^2}{8}.$$
 (6-50)

Mit dieser Näherung folgt:

$$L(\tilde{\tau}) \approx \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_{\underline{\tilde{a}}} \left[1 + \frac{h^2}{2N_0^2} \left| \sum_{k=1}^{L_0} \tilde{a}^*[k] x(kT + \tilde{\tau}) \right|^2 \right]$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} + \frac{h^2}{4\pi N_0^2} \sum_{k=1}^{L_0} \mathbf{E} \left[\tilde{a}^*[k] \tilde{a}[i] \right] x(kT + \tilde{\tau}) x^*(iT + \tilde{\tau}).$$
(6-51)

Bei Annahme statistisch unabhängiger Symbole gilt

Sync6Takt.doc

20.10.2016

$$\mathbf{E}\left[\tilde{a}^{*}[k]\tilde{a}[i]\right] = \begin{cases} \mathbf{E}\left[\left|\tilde{a}[k]\right|^{2}\right] & \text{für } k = i\\ 0 & \text{für } k \neq i \end{cases},$$
(6-52)

wobei $E[|\tilde{a}[k]|^2]$ unabhängig von k ist. Da additive Terme und konstante Faktoren die Lage des Maximums nicht beeinflussen, können wir diese auch weglassen. Die so modifizierte ML-Funktion bezeichnen wir mit $\Lambda(.)$ und wir erhalten

$$\Lambda(\tilde{\tau}) \approx \sum_{k=1}^{L_0} \left| x \left(kT + \tilde{\tau} \right) \right|^2.$$
(6-53)

Die Summe stellt die Leistung des zeitdiskreten Signals nach dem matched Filter dar. $\hat{\tau}$ ist nun so zu bestimmen, dass (6-53) maximal wird. Offensichtlich kann das Ergebnis wie folgt interpretiert werden:

$\hat{\tau} = \tau$ maximiert die Leistung des im Symboltakt abgetasteten Empfangssignals nach dem matched Filter!

Zur Gewinnung eines Fehlersignals setzen wir wieder $L_0 = 1$, differenzieren (6-53) nach $\tilde{\tau}$ und erhalten

$$\frac{d\Lambda(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \approx 2 \operatorname{Re}\left\{x'\left(kT+\tilde{\tau}\right)x^{*}\left(kT+\tilde{\tau}\right)\right\}.$$
(6-54)

Als Fehlersignal eignet sich für den Daten-unabhängigen Maximum-Likelihood-Detektor

NDA-MLD:
$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{x'\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)x^*\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)\right\}.$$
 (6-55)

Dies Ergebnis ähnelt dem Ergebnis aus der entscheidungsgestützten Schätzung gemäß (6-18). Es ist nur $\hat{a}^*[k]e^{-j\hat{\theta}}$ durch $x^*(kT + \hat{\tau}[k])$ zu ersetzen. Auch dieses Fehlersignal liefert einen irreduziblen mittleren Schätzfehler, der allein durch Eigeninterferenz verursacht wird. Analog zu (6-27) kann diese durch Subtraktion eines Teils der Interferenz deutlich reduziert werden. Als verbessertes Fehlersignal für Daten-unabhängige ML-Schätzung eignet sich

$$e_{D}[k] = \operatorname{Re}\left\{x^{*}[k]\left(x'[k] - \sum_{l=-D}^{D} x[k-l]\rho'_{gg}(lT)\right)\right\}.$$
(6-56)

Wie bei Daten-gestützter Schätzung erfordert die Berechnung des Fehlersignals zwei Filterungen des frequenzkorrigierten Empfangssignals.

Um die Differentiation zu sparen, kann man sie wie beim Early-Late Detektor durch die Differenz benachbarter Abtastwerte approximieren. Das liefert das Fehlermaß für den Datenunabhängigen Early-Late Detektor oder kurz

NDA-ELD:
$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{x^{*}\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)\left(x\left(kT + T/2 + \hat{\tau}[k]\right) - x\left(kT - T/2 + \hat{\tau}[k]\right)\right)\right\}.$$
 (6-57)

Dieser erfordert wieder zwei Abtastwerte pro Symbol und ist wie in Abb. 6-22 skizziert aufgebaut.



Abb. 6-22: Struktur des Daten-unabhängigen Early-Late Detektors zur Korrektur der Taktphase

Ein verbessertes Fehlermaß mit ISI-Kompensation erhält man aus dem entscheidungsgestützten Ansatz für den ELD, indem man in (6-34) $e^{-j\hat{\theta}}\hat{a}[k]$ durch x[k] ersetzt:

$$e_{D}[k] = e[k] - \operatorname{Re}\left\{x^{*}[k]\sum_{\substack{l=-D\\l\neq 0}}^{D}x[k-l]\left(\rho_{gg}\left(lT + \frac{T}{2}\right) - \rho_{gg}\left(lT - \frac{T}{2}\right)\right)\right\}$$
(6-58)

In ähnlicher Weise kann man auch einen Daten-unabhängigen Nulldurchgangsdetektor (NDA-ZCD) konstruieren. Man ersetzt in (6-35) $a^*[k]e^{-j\hat{\theta}}$ und $a^*[k-1]e^{-j\hat{\theta}}$ durch $x^*(kT+\hat{\tau}[k])$ bzw. $x^*((k-1)T+\hat{\tau}[k])$ und erhält als Fehlersignal für den

NDA-ZCD:
$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{\left(x^{*}\left(kT + \hat{\tau}[k]\right) - x^{*}\left((k-1)T + \hat{\tau}[k-1]\right)\right)x\left(kT - T/2 + \hat{\tau}[k]\right)\right\},$$
 (6-59)

und mit ISI-Kompensation

$$e_{D}[k] = e[k] - \operatorname{Re}\left\{ \left(x^{*}[k-1] - x^{*}[k] \right) \sum_{\substack{l=-D\\ l \neq \{0,1\}}}^{D+1} x[k-l] \rho_{gg} \left(lT - T/2 \right) \right\}$$
(6-60)

Die S-Kurven für diese Schätzer sind etwas aufwändiger zu ermitteln als bei Entscheidungsgestützten Schätzern. Das Prinzip zu deren Ermittlung ist aber das gleiche. Die genaue Herleitung ist im Anhang H zu finden.

Abb. 6-23 zeigt die Leistungsfähigkeit dieser Verfahren. Der mittlere Schätzfehler lässt sowohl beim ELD als auch beim ZCD wieder ein Ausflachen erkennen, nun aber auf einem deutlich höheren Niveau als bei Daten-gestützter Schätzung. Dieser Restfehler auf Grund der ISI nimmt mit abnehmendem α signifikant zu. Die Kurven für den ELD erweisen sich als unabhängig vom Modulationsalphabet. Die Kurven des ZCDs nähern sich mit zunehmender Amplitudenvariation des Modulationsalphabets denen des ELDs an.

Das Ausflachen der Kurven für großes E_S/N_0 kann man beim NDA-ELD mittels der ISI-Kompensation nach (6-58) noch signifikant abmildern, wie die Kurven in Abb. 6-24 deutlich erkennen lassen. Die Cramer-Rao-Schranke wird zwar nicht erreicht, aber das Ausflachen findet auf einem deutlich niedrigeren Niveau statt.

Man kann den Schluss ziehen, dass auch Daten-unabhängige Taktschätzung möglich ist, wobei die Schätzgenauigkeit bei einer geforderten Dynamik in den meisten Anwendungsfällen sogar ausreichen dürfte.

Sync6Takt.doc



Abb. 6-23: Mittlerer Schätzfehler des Abtastzeitpunktes für Daten-unabhängige Schätzverfahren; Modulation mit Wurzel-Cosinus-Impulsen



Abb. 6-24: Mittlerer Schätzfehler des Abtastzeitpunktes für den Daten-unabhängigen ELD mit ISI-Kompensation; Modulation mit Wurzel-Cosinus-Impulsen

7 Signaldetektion

In einem Übertragungssystem, in dem ein Sender zu nicht bekannten Zeitpunkten kurze Datenpakete aussendet, muss der Empfänger zunächst erkennen, ob ein Datenpaket gesendet wurde und wenn ja, wann es genau beginnt. Dazu muss er das Empfangssignal ständig analysieren. Dies ist ein typisches Problem in Telemetriesystemen. Derartige Systeme bestehen aus einer Vielzahl von Sensoren, die Messdaten in gewissen Zeitabständen aussenden. Viele Systeme arbeiten unsynchronisiert, d.h. es besteht weder eine Zeit- noch eine Frequenzsynchronisation zwischen Sender und Empfänger.

Ein konkretes Beispiel hierfür ist die Erfassung von Wasser-, Gas- und Heizungszählerständen von Wohn oder Industriegebäuden, die zunehmend auf Funkübertragung umgestellt wird. Die einzelnen Sensorknoten senden in relativ großen Abständen kurze Datenpakte mit geringer Leistung. Da die einzelnen Sensorknoten autonom arbeiten, also nicht miteinander synchronisiert sind, sind die Sendezeitpunkte für die Pakete völlig unabhängig voneinander. Ist ein Empfänger für eine Vielzahl von Sensorknoten zuständig, kann dies auf dem Funkweg zu Kollisionen von Paketen zweier Sensoren führen. Zur Vermeidung von periodischen Kollisionen lässt man die Sendezeitpunkte quasi-zufällig von einem periodischen Muster abweichen. Jeder Knoten hat dazu seinen eigenen Zufallsgenerator. Der Empfänger kennt die Sendezeiten der einzelnen Knoten nicht.

Eine besondere Herausforderung wird hier an die Empfängerempfindlichkeit gestellt. Ein Paket soll auch dann zu erkennen sein, wenn dessen Empfangsleistung in der Größenordnung der Leistung des Empfängereingangsrauschens nach dem Empfangsfilter liegt. Bei einer optimalen Kombination von Modulation und Kanalcodierung kann bei einem SNR von bereits 0 dB eine Datenerkennung durchaus korrekt erfolgen. Der Empfänger sollte also auch bei einem derart niedrigen Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis in der Lage sein, das Vorhandensein eines Datenpakets sicher von reinem Rauschen zu unterscheiden. Es ist offensichtlich, dass dazu eine reine Leistungsmessung des verrauschten Empfangssignals nicht ausreicht.

Zur Unterstützung der Signaldetektion beinhalten die Sendepakete immer eine Trainingssequenz. Häufig wird sie den Nutzdaten vorangestellt und wird dann auch Präambel genannt. Man kann sie aber auch in die Mitte zwischen den Daten positionieren, was bei schnell bewegten Sendern oder Empfängern gewisse Vorteile hat. Dann nennt man sie auch Midambel. Die Trainingssequenz ist dem Empfänger natürlich bekannt. Sie bildet die Grundlage der Signaldetektion.

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Prinzipien der Signaldetektion in weißem Gauß'schen Rauschen vorgestellt. Die Leistungsfähigkeit des optimalen Detektors wird quantitativ analysiert. Wir beschränken die Betrachtung auf Pakete, deren Trainingssequenz am Anfang gesendet wird und verwenden von nun ab den Begriff Präambeldetektion, denn die Nutzdaten sind für das Detektionsproblem nicht relevant. Die vorgestellten Prinzipien gelten selbstverständlich auch für die Midambeldetektion. Wir beschränken die Betrachtungen auf lineare Modulationsverfahren und nicht-zeitdispersive Kanäle.

7.1 Optimalfilter zur Präambeldetektion

Aus dem Empfangssignal wird ein Segment der Länge T_0 (= Präambeldauer) beobachtet, aus dem eine Entscheidungsvariable hergeleitet wird, die eine möglichst zuverlässige Aussage über das Vorhandensein einer Präambel erlaubt. Eine lineare Filterung stellt eine einfache Möglichkeit dar, so eine Entscheidungsvariable zu gewinnen. Man beobachtet einfach das Ausgangssignal des Filters und entscheidet in regelmäßigen Abständen (z.B. durch Abtastung im Symboltakt), ob eine Präambel vorgelegen hat oder nicht. Gesucht ist nun ein Filter, das das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis maximiert, wenn eine Präambel tatsächlich vorhanden ist.

Genau diese Aufgabe wurde bereits in der Nachrichtentechnik in Verbindung mit der Symboldetektion gestellt und gelöst. Zum Auffinden des optimalen Filters wurde das Allgemeine Problem betrachtet, einen einzelnen Signalimpuls g(t) im Rauschen zu entdecken. Als optimale Lösung wurde das Signal-angepasste Filter (matched Filter) hergeleitet. Zur Detektion von Datensymbolen ist die Impulsanwort des auf g(t) angepassten Filters gleich $c \cdot g^*(-t)$, wobei c eine beliebige komplexe Konstante darstellt.

Die Detektion einer Präambel ist im Prinzip nichts anderes. Dies sei an Hand des Übertragungsmodells nach Abb. 7-1 erläutert. Die Präambel sei durch das zeitkontinuierliche Signal s(t) repräsentiert, das nur innerhalb des Intervalls $0 \le t \le T_0$ von Null verschiedene Werte aufweisen möge. Es werde durch den Kanal um den reellwertigen Amplitudenfaktor h gedämpft und in der Phase um den Winkel θ gedreht. Der Kanal wird als verzögerungsfrei angenommen. Im Empfänger erfolgt die Addition eines weißen Gauß'schen Rauschsignals n(t). Das so erhaltene Empfangssignal

$$r(t) = s(t)he^{j\theta} + n(t)$$
(7-1)

wird einer linearen Filterung unterworfen, dessen Ausgangssignal die Entscheidungsgrundlage für das Vorhandensein einer Präambel darstellt.

$$\begin{array}{c} s(t), \\ S(f) \end{array} \xrightarrow{he^{j\theta}} n(t) \end{array} \xrightarrow{r(t)} \begin{array}{c} \text{lin. Filter} \\ h(t), H(f) \end{array} \xrightarrow{d(t)} d(t_{\text{opt}}) \\ \downarrow \\ t_{\text{opt}} = 0 \end{array}$$

Abb. 7-1: Übertragungsmodell zur Herleitung des Optimalfilters

Das optimale Filter, das für weißes Gauß'sches Rauschen das SNR zum Entscheidungszeitpunkt $t_{opt} = 0$ maximiert, hat dann

die Übertragungsfunktion	$H_{\rm opt}(f) = c \cdot S^*(f)$	(7-2)
--------------------------	-----------------------------------	-------

und die Impulsantwort	$h_{\mathrm{opt}}(t) = c \cdot s^*(-t)$.	(7-3)
-----------------------	---	-------

Wahl der Konstanten c:

Die Konstante c ist frei wählbar. Als zweckmäßig erweist sich die Wahl

$$c = \frac{1}{\sqrt{E_s T}} \tag{7-4}$$

mit

Sync7Detektion.doc

$$E_{s} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| s(t) \right|^{2} dt \tag{7-5}$$

als Energie des Sendesignals s(t) und T als Symboldauer. Die Division durch $\sqrt{E_s}$ stellt eine Normierung der Impulsantwort des Empfangsfilters auf die Impulsenergie 1 dar. Die zusätzliche Division durch \sqrt{T} erscheint sinnvoll, um die Übertragungsfunktion $H_{opt}(f)$ dimensionsneutral zu bekommen, wie es in einem realisierbaren System sein muss. Wenn z. B. s(t) eine Spannung in Volt (V) ist, hat deren Fourier-Transformierte die Einheit Voltsekunde (Vs). Die Energie E_p hat die Einheit V²s, so dass c die Einheit 1/Vs hat. Damit ist $G_{opt}(f)$ dimensionsneutral.

Die Entscheidungsvariable nach dem Optimalfilter ist dann gegeben durch

$$d(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} r(\vartheta + t) s^*(\vartheta) d\vartheta.$$
(7-6)

Die Impulsantwort (7-3) ist offensichtlich nicht kausal. Um das Filter realisieren zu können, muss die Impulsantwort noch um die Dauer T_0 des Signals s(t) verzögert werden. Um genau diesen Wert muss natürlich auch der optimale Abtastzeitpunkt verzögert werden. Diese Zeitverschiebung wird im Folgenden aber nicht berücksichtigt, um die Notation einfach zu halten.

Für die Leistungen von Nutz- und Rauschanteil in der Entscheidungsvariablen lassen sich folgende Beziehungen angeben (mit c aus (7-4)):

Rauschleistung:

$$P_{\rm N} = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\rm opt} \left(f \right) \right|^2 df = \frac{N_0}{T} \,. \tag{7-7}$$

Nutzleistung zum Zeitpunkt t_{opt} : $P_{\text{S}} = \left| h \int_{-\infty}^{\infty} S(f) H_{\text{opt}}(f) df \right|^2 = \frac{E_{\text{P}}}{T}.$ (7-8)

Darin ist N_0 die (einseitige) Rauschleistungsdichte des Rauschsignals und $E_P = h^2 E_s$ die Empfangsenergie des Präambelsignals.

Das Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis ist also gegeben durch

$$SNR(t_{opt}) = \frac{P_{\rm S}}{P_{\rm N}} = \frac{E_{\rm P}}{N_0}.$$
(7-9)

Zur Herleitung des Optimalfilters wurden keinerlei Annahmen zur Modulationsart getroffen. Insbesondere ist es auch für nichtlineare Modulationsverfahren optimal, wie z.B. Frequenzmodulation.

Bei *linearen Modulationsverfahren* kann das Filter besonders einfach als Hintereinanderschaltung des üblichen an g(t) angepassten Filters und einem zeitdiskreten Korrelator realisiert werden. Dass diese Zerlegung gilt, kann leicht durch Betrachtung des ungestörten Ausgangssignals d(t) verifiziert werden:

Eine linear modulierte Präambel ist durch den Modulationsimpuls g(t) und die Präambelsymbole $a[0], a[1], ..., a[L_0-1]$ bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$s(t) = \sum_{\kappa=0}^{L_0-1} a[\kappa] g(t-\kappa T).$$
(7-10)

Dies in (7-6) eingesetzt ergibt nach Vertauschung von Summation und Integration

$$d(t) = c \sum_{\kappa=0}^{L_0-1} a^* [\kappa] \int_{-\infty}^{\infty} r(\vartheta + t) g^* (\vartheta - \kappa T) d\vartheta$$
$$= c \sum_{\kappa=0}^{L_0-1} a^* [\kappa] \int_{-\infty}^{\infty} r(\vartheta + t + \kappa T) g^* (\vartheta) d\vartheta.$$
(7-11)

Darin stellt das Integral das auf g(t) angepasste Filter dar. Die nachfolgende Summation kann als FIR-Filter mit den Filterkoeffizienten $a^*[0]$, $a^*[1]$, ..., $a^*[L_0-1]$ aufgefasst werden. Sie lässt sich als Korrelator interpretieren, der Abtastwerte des ersten Filters im Symbolabstand *T* mit der Präambelsymbolfolge korreliert.

Abb. 7-2 stellt die Blockstruktur des auf s(t) angepassten Filters bei linearer Modulation dar. Dabei wurde eine Abtastung im Symboltakt angenommen. Natürlich kann man auch mit einem ganzzahligen Vielfachen *M* der Symbolrate abtasten. Dann muss nur z^{-1} durch z^{-M} ersetzt werden, so dass jedes Verzögerungselement um jeweils *M* Werte verzögert.



Abb. 7-2: Blockschaltbild zur Realisierung des Optimalfilters zur Präambeldetektion

Setzt man (7-1) in (7-6) ein, erhält man

$$d(t) = \frac{he^{j\theta}}{\sqrt{E_sT}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\vartheta + t) s^*(\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{\sqrt{E_sT}} \int_{-\infty}^{\infty} n(t) s^*(\vartheta) d\vartheta$$
$$= \sqrt{\frac{E_p}{T}} e^{j\theta} \rho_{ss}(t) + n'(t) \qquad (7-12)$$

Darin stellt $\rho_{ss}(t)$ die AKF des Präambelsignals s(t) dar. Sie ist auf den Maximalwert 1 normiert. Der Nutzanteil von d(t) ist also proportional zur AKF der Präambel. Im Fall von weißem Gauß'schen Rauschen (WGN) ist das gefilterte Rauschsignal n'(t) natürlich auch Gauß'sch und hat die Leistung gemäß (7-7).

Es liegt nahe, als Entscheidungsvariable den Realteil von $d(t) \cdot e^{-j\theta}$ zu verwenden. Dann liegt der Maximalwert $\rho_{ss}(t=0)$ auf der reellen Achse der komplexen Ebene und vom Rauschen ist nur noch die halbe Leistung wirksam.

Jedoch ist in vielen Systemen die Phase des Kanals vor Empfang der Präambel nicht bekannt. Zum Beispiel werden in einem Telemetriesystem nur sehr selten Telegramme gesendet. In der Zeit zwischen zwei Telegrammen desselben Senders hat der Empfänger keine Möglichkeit die Phase zu schätzen. Da sich die Phase des Kanals in dieser Zeit aber stark verändern kann, kann man die Phase des vorherigen Telegramms nicht mehr verwenden. Es bleibt nichts anderes übrig, als die Phase als Zufallsvariable mit der größtmöglichen Unsicherheit, nämlich einer Gleichverteilung zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zu betrachten. Dann liegt es nahe, als Entscheidungsvariable den Betrag von d(t) zu verwenden.

Aus der Literatur sind zwei grundsätzlich verschiedene Prinzipien bekannt, um eine Präambel an Hand dieser Entscheidungsvariablen zu detektieren:

- Schwellwertdetektion oder
- Maximumdetektion.

Bei der *Schwellwertdetektion* wird die Entscheidungsvariable mit einer Entscheidungsschwelle d_{thr} verglichen. Liegt der Betrag über (bzw. unter) der Schwelle, wird angenommen, dass die vergangenen L_0 Symbolintervalle eine (bzw. keine) vollständige Präambelsequenz beinhalteten. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt in der Festlegung der Entscheidungsschwelle, die wie im nachfolgenden Abschnitt 7.3 noch gezeigt werden wird, eine möglichst genaue Kenntnis der Störleistung erfordert.

Bei der *Maximalwertdetektion* wird keine Entscheidungsschwelle benötigt. Es wird einfach das Maximum der Entscheidungsvariablen innerhalb eines Beobachtungsfensters detektiert und die zeitliche Lage dieses Maximalwertes als Präambelposition angenommen. Dieses Verfahren liefert natürlich nur dann zuverlässige Ergebnisse, wenn a priori bekannt ist, dass in dem Beobachtungsfenster eine und zwar genau eine Präambel vorhanden ist. Wenn mehrere Präambeln vorhanden sind, werden die mit der kleineren Empfangsleistung nicht erkannt. Liegt keine Präambel vor, kommt es sicher zu einer Falscherkennung oder Vortäuschung. Sofern der Datenteil der Telegramme noch mit einem Fehler erkennenden Code (z.B. CRC) geschützt sind, kann durch das Prüfen der Redundanzstellen mit hoher Sicherheit leicht festgestellt werden, ob es sich nicht um ein gültiges Telegramm gehandelt hat oder nicht. Der Prozessor hat dann allerdings etwas mehr zu tun, da er häufig demodulieren und die CRC-Bits berechnen muss. Bei Datenpaketen mit CRC mag eine Falscherkennung also als unkritisch eingestuft werden. In diesem Fall könnte man in aufeinander folgenden Intervallen der Dauer T_0 jeweils das Maximum detektieren.

Wir wollen im Folgenden ausschließlich die zuverlässigere Schwellwertdetektion betrachten und diese näher analysieren. Bevor wir auf eine quantitative Bewertung eingehen, wollen wir uns dem Thema der Präambeldetektion noch von der wahrscheinlichkeitstheoretischen Seite nähern. Die Detektionstheorie liefert eine Detektionsvorschrift, die nach gewissen Kriterien optimal ist. Als wesentliches Ergebnis sei vorweggenommen, dass das oben beschriebene Signal-angepasste Filter für AWGN im Sinne der Detektionstheorie tatsächlich optimal ist. Gleichzeitig liefert die Theorie eine Vorschrift zur Bestimmung der optimalen Entscheidungsschwelle.

7.2 Einführung in die Detektionstheorie

Aus dem Empfangssignal wird ein Segment der Länge T_0 (= Präambeldauer) beobachtet. Für jede zeitliche Lage des Zeitfensters werden zwei Hypothesen aufgestellt:

- Hypothese \mathcal{H}_0 : Präambel nicht bzw. nur unvollständig vorhanden,
- Hypothese \mathcal{H}_1 : Präambel vollständig vorhanden.

Dieses Vorgehen wird Hypothesentest genannt. Die wahrscheinlichste Hypothese wird dann ausgewählt. Dabei können zwei Entscheidungsfehler auftreten:

• Falscherkennung (False Alarm): Es liegt keine Präambel vor, dennoch wurde eine erkannt. Die Wahrscheinlichkeit für Falscherkennung wird Vortäuschungswahrscheinlichkeit genannt. Wir bezeichnen sie mit dem Symbol P_{FA} (False alarm probability). Sie ist definiert durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese \mathcal{H}_1 angenommen wird, obwohl \mathcal{H}_0 tatsächlich richtig ist. Mathematisch ausgedrückt lautet die Definition

$$P_{\rm FA} = \Pr\left\{\mathcal{H}_1 \middle| \mathcal{H}_0\right\}. \tag{7-13}$$

Nicht erkannte Präambel (Missed Detection): Es ist tatsächlich eine Präambel vorhanden, aber sie wurde nicht erkannt. Die Wahrscheinlichkeit für eine nicht erkannte Präambel wird Verpasserwahrscheinlichkeit genannt. Wir bezeichnen sie mit dem Symbol *P*_M (Missed detection probability). Sie ist definiert durch die Wahrscheinlichkeit, dass die Hypothese *H*₀ angenommen wird, obwohl *H*₁ tatsächlich richtig ist. Mathematisch ausgedrückt lautet die Definition

$$P_{\rm M} = \Pr\left\{\mathcal{H}_0 \middle| \mathcal{H}_1\right\}. \tag{7-14}$$

Die Wahrscheinlichkeiten für beide Fehler sollten so klein wie möglich sein. Darüber hinaus wird auch der Begriff Detektionswahrscheinlichkeit verwendet, der mit dem Formelsymbol $P_{\rm D}$ bezeichnet wird. Dieser liefert aber keinerlei neue Information denn es gilt: $P_{\rm D} = 1 - P_{\rm FA}$. Zur Veranschaulichung dieser beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten möge folgendes einfache Beispiel dienen:

Beispiel 1: Auf Basis eines einzelnen Abtastwertes soll entschieden werden, ob ein Gleichanteil μ im Rauschen vorhanden ist oder nicht:

 $\mathcal{H}_0: r = w, w = \text{Gau}\beta$ 'sches Rauschen mit Varianz σ^2 $\mathcal{H}_1: r = \mu + w$

Intuitiv erscheint es vernünftig, eine Schwellwertentscheidung zu treffen: Liegt *r* unter einer Schwelle r_{thr} , wird \mathcal{H}_0 , anderenfalls \mathcal{H}_1 angenommen. Zur Ermittlung von P_{FA} und P_M werden die Likelihoodfunktionen für \mathcal{H}_0 und \mathcal{H}_1 benötigt. Da es sich bei *w* um Gauß'sches Rauschen handelt, sind dies in jedem Fall Gaußverteilungen und zwar

für
$$\mathcal{H}_0$$
: $q_0(r|\mathcal{H}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ und (7-15)

für
$$\mathcal{H}_1$$
: $q_1(r|\mathcal{H}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$ (7-16)

Die Vortäuschungs- und Verpasserwahrscheinlichkeiten errechnen sich aus $P_{\rm FA} = \int_{r_{\rm thr}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = Q\left(\frac{r_{\rm thr}}{\sigma}\right) \text{ bzw. } P_{\rm M} = \int_{-\infty}^{r_{\rm thr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}} dr = 1 - Q\left(\frac{r_{\rm thr}-\mu}{\sigma}\right).$

Die Zusammenhänge sind in Abb. 7-3 veranschaulicht. $P_{\rm M}$ entspricht der Fläche unter der mittelwertfreien Gaußverteilung von - ∞ bis $r_{\rm thr}$. $P_{\rm FA}$ entspricht der Fläche unter

Gaußverteilung mit dem Mittelwert μ von r_{thr} bis ∞ . Es ist offensichtlich, dass durch eine Erhöhung der Entscheidungsschwelle P_{FA} verringert aber P_{M} vergrößert wird.



Abb. 7-3: Zusammenhang zwischen den Likelihoodfunktionen und den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten

Was in diesem einfachen Beispiel sofort einsichtig ist, gilt allgemein: Eine Verringerung der einen Fehlerwahrscheinlichkeit führt automatisch zu einer Vergrößerung der anderen. Man kann also nicht beide gleichzeitig minimieren.

Zur Bestimmung der Entscheidungsschwelle muss man für eine der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten einen gerade noch tolerierbaren Wert festlegen. Eine Entscheidungsschwelle, die dann die andere Fehlerwahrscheinlichkeit minimiert, wird als optimal betrachtet. Wie diese Schwelle ermittelt werden muss, haben zwei Mathematiker herausgefunden: Der Polenstämmige und später US-Amerikanische Mathematiker Jerzy Neyman sowie der englische Mathematiker Egon Pearson. Das nach ihnen benannte Neyman-Pearson-Lemma wurde erstmals 1933 veröffentlicht. Es wird auch Neyman-Pearson-Hypothesentest genannt.

Im folgenden wird eine auf Signaldetektion spezialisierte Fassung des Neyman-Pearson-Lemmas wiedergegeben:

Gegeben seien *K* beobachtbare Werte, die in dem Vektor $\underline{\mathbf{r}} = [r_0, r_1, ..., r_{K-1}]$ zusammengefasst werden. $\underline{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, ..., s_{N-1}]$ sei ein bekannter Vektor, der in r enthalten sein kann, wobei $N \le K$ gelten soll.

Hypothese \mathcal{H}_0 : <u>**r**</u> beinhaltet nicht den Vektor <u>**s**</u>

Hypothese \mathcal{H}_1 : **<u>r</u>** beinhaltet den Vektor <u>s</u>.

Gegeben seien ferner die K-dimensionalen bedingten WDFen (Likelihoodfunktionen) $q_0(\underline{\mathbf{r}}|\mathcal{H}_0)$ und $q_1(\underline{\mathbf{r}}|\mathcal{H}_1)$.

Neyman-Pearson-Hypothesentest:

Bei vorgegebener Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} wird die Verpasserwahrscheinlichkeit P_{M} minimiert, wenn als Kriterium für \mathcal{H}_{1}

$$L(\underline{\mathbf{r}}) = \frac{q_1(\underline{\mathbf{r}}|\mathcal{H}_1)}{q_0(\underline{\mathbf{r}}|\mathcal{H}_0)} > \gamma$$
(7-17)

verwendet wird, wobei sich die Entscheidungsschwelle γ aus

$$P_{\rm FA} = \int_{\underline{\mathbf{r}}: L(\underline{\mathbf{r}}) > \gamma} q_0 \left(\underline{\mathbf{r}} \middle| \mathcal{H}_0 \right) d\underline{\mathbf{r}}$$
(7-18)

ergibt.

 $L(\mathbf{r})$ wird als Likelihood-Verhältnis bezeichnet. Die fundamentale Aussage ist, dass der optimale Test immer auf eine eindimensionale Entscheidungsvariable zurückgeführt werden kann. Diese Entscheidungsvariable ist durch das Verhältnis der Likelihoodfunktionen gegeben. Gleichzeitig liefert der Test eine Vorschrift zur Berechnung der optimalen Entscheidungsschwelle. Mit der Ungleichung (7-17) wird ein Gebiet im K-dimensionalen Raum über \mathbf{r} definiert. Dieses Gebiet ist durch die Entscheidungsschwelle γ festgelegt. γ ist nun so zu bestimmen, dass das Integral von $q_0(\mathbf{r}|\mathcal{H}_0)$ über dieses Gebiet die vorgegebene Vortäuschungswahrscheinlichkeit ergibt.

Fortsetzung von Beispiel 1 (Detektion eines Gleichanteils in Gauß'schem Rauschen):

(7-15) und (7-16) in (7-17) eingesetzt ergibt für das

Likelihoodverhältnis:
$$L(r) = \frac{q_1(r|\mathcal{H}_1)}{q_0(r|\mathcal{H}_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}} = e^{-\frac{(r-\mu)^2-r^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{2r\mu-\mu^2}{2\sigma^2}}.$$

Die Anwendung des Neyman-Pearson-Hypothesentest liefert:

$$L(r) > \gamma \implies r > \frac{\sigma^2}{\underbrace{\mu}_{r_{thr}} \ln \gamma + \frac{\mu^2}{2}},$$

Die Entscheidungsschwellen γ und r_{thr} sind also umkehrbar eindeutig ineinander umrechenbar. Bei Gauß'schem Rauschen mit der Varianz σ^2 ergibt sich r_{thr} unmittelbar über die inverse Q-Funktion gemäß $r_{\text{thr}} = \sigma Q^{-1}(P_{\text{FA}})$.

Natürlich bleibt die Ungleichung (7-17) bestehen, wenn man eine streng monoton steigende Funktion auf beide Seiten anwendet, und/oder beide Seiten mit einem konstanten positiven Faktor multipliziert und/oder auf beiden Seiten eine Konstante addiert. Bei Gauß-Verteilungen erweist es sich insbesondere als zweckmäßig, den natürlichen Logarithmus des Likelihoodverhältnisses zu verwenden.

Wir wollen nun zeigen, dass das im vorigen Abschnitt angegebene Signal-angepasste Filter aus dem Neyman-Pearson-Hypothesentest hergeleitet werden kann und somit im Sinne dieses Tests einen Optimaldetektor darstellt.

Herleitung des Optimaldetektors:

 $\mathbf{w} = [w_0, w_1, ..., w_{K-1}]$ sei ein Mustervektor eines stationären, weißen, mittelwertfreien und komplexen Gauß'schen stochastischen Prozesses und

 $\underline{\mathbf{s}} = [s_0, s_1, ..., s_{K-1}]$ seien (komplexe) Abtastwerte eines bekannten Signals (z.B. Präambel) und

 $\underline{\mathbf{r}} = [r_0, r_1, ..., r_{K-1}]$ sei ein beobachtbarer Vektor (Abtastwerte eines Empfangssignals), wobei

$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{cases} \underline{\mathbf{w}} & \text{für } \mathcal{H}_0 \\ \underline{\mathbf{s}} e^{j\theta} + \underline{\mathbf{w}} & \text{für } \mathcal{H}_1 \end{cases} \text{ gilt.}$$

Dann sind die Likelihoodfunktionen

für
$$\mathcal{H}_0$$
: $q_0\left(\underline{\mathbf{r}} \middle| \mathcal{H}_0\right) = \frac{1}{\pi^K \sigma^K} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{K-1} \bigl| r_k \bigr|^2\right)$ und (7-19)

für
$$\mathcal{H}_1$$
: $q_1\left(\underline{\mathbf{r}} \middle| \mathcal{H}_1\right) = \frac{1}{\pi^K \sigma^K} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{K-1} \left| r_k - s_k e^{j\theta} \right|^2\right).$ (7-20)

Der Logarithmus des Likelihoodverhältnisses kann dann durch

$$\sigma^{2} \ln L(\mathbf{\underline{r}}) = \sum_{k=0}^{K-1} |r_{k}|^{2} - \sum_{k=0}^{K-1} |r_{k} - s_{k}e^{j\theta}|^{2} = 2 \operatorname{Re}\left\{e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{K-1} |r_{k}s_{k}^{*}\right\} - \sum_{k=0}^{K-1} |s_{k}|^{2}$$
(7-21)

ausgedrückt werden. Die letzte Summe stellt die Präambelenergie dar. Sie ist konstant, trägt nichts zur Entscheidungsfindung bei und kann daher auf die andere Seite der Gleichung gebracht werden. Die restliche Summe kann nun mit einer gegenüber γ modifizierten Schwelle verglichen werden, die wir mit $d_{\rm thr}$ bezeichnen wollen. Die Anwendung des Neyman-Pearson-Tests liefert also als Entscheidungskriterium

bei bekannter Phase
$$\theta$$
. Re $\left\{ e^{-j\theta} \sum_{k=0}^{K-1} r_k s_k^* \right\} > d_{\text{thr}}$. (7-22)

wobei $d_{\text{thr}} \sim \ln \gamma$ ist. Die Summe auf der linken Seite der Ungleichung ist die Kreuzkorrelation des Empfangssignals mit den Abtastwerten der Präambel und entspricht dem unter Abschnitt 7.1 hergeleiteten Optimalfilter. Im Falle von stationärem AWGN liefert das Filter also Entscheidungsvariablen, die auch im Sinne des Neyman-Pearson-Tests optimal sind.

Bei unbekannter Phase θ ist der Erwartungswert von (7-20) über die Phase zu berechnen. Bei Annahme einer zwischen $-\pi$ und π gleichverteilten Phase kommt als Ergebnis zunächst die modifizierte Besselfunktion I₀($|\xi|$) heraus, deren Argument der Betrag der

Summe $\sum_{k=0}^{K-1} r_k s_k^*$ aus (7-22) ist (vgl. Kapitel 4, Abschnitt 1). Wegen der strengen Mono-

tonie der Funktion $I_0(.)$ für positive Argumente kann auch das Argument, also der Betrag der Summe mit der Schwelle verglichen werden. Sclussfolgerung:

Bei unbekannter Phase
$$\theta$$
 ist $\left|\sum_{k=0}^{K-1} r_k s_k^*\right| > d_{\text{thr}}$ (7-23)

optimal im Sinne des Neyman-Pearson-Tests.

7.3 Entscheidungsschwelle für den Optimaldetektor bei linear modulierten Präambeln

Zur Ermittlung der optimalen Entscheidungsschwelle bei vorgegebener Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} benötigen wir die WDF $p_0(|d||\mathcal{H}_0)$ des Betrages der Zufallsvariablen D für die Hypothese \mathcal{H}_0 , dass im Zeitfenster zwischen $(k-L_0+1)T$ und kT keine bzw. keine vollständige Präambel empfangen wurde. Die Abtastwerte des Entscheidungssignals d(t) gemäß (7-11) stellen Musterwerte dieser Zufallsvariablen dar. Da D Gauß-verteilt ist, genügt die Kenntnis von Mittelwert und Varianz. Der Mittelwert ist Null, da die Entscheidungsvariable für \mathcal{H}_0 nur durch mittelwertfreies Rauschen bestimmt ist. Die Varianz ist gleich der Rauschleistung aus (7-7), also

Sync7Detektion.doc
$$\sigma_D^2 = \frac{N_0}{T}.$$
(7-24)

Der Betrag komplex Gauß-verteilter mittelwertfreier Zufallsvariabler ist Rayleigh-verteilt. Es folgt

$$p_0\left(\left|d\right|\left|\mathcal{H}_0\right) = \frac{2\left|d\right|}{\sigma_D^2} \exp\left(-\frac{\left|d\right|^2}{\sigma_D^2}\right).$$
(7-25)

Der Zusammenhang zwischen der Vortäuschungswahrscheinlichkeit und der Entscheidungsschwelle ist dann gegeben durch

$$P_{\rm FA} = \int_{d_{\rm thr}}^{\infty} p_0\left(x \middle| \mathcal{H}_0\right) dx = \exp\left(-\frac{d_{\rm thr}^2}{\sigma_D^2}\right).$$
(7-26)

Nach Umstellung erhalten wir eine geschlossene Lösung zur Bestimmung der optimalen Entscheidungsschwelle für mittelwertfreies Gauß'sches Rauschen:

$$d_{\rm thr} = \sigma_D \sqrt{-\ln P_{\rm FA}} \,. \tag{7-27}$$

Ihre Berechnung erfordert die Kenntnis der Rauschvarianz σ_D^2 bzw. der Rauschleistungsdichte N_0 .

7.4 Leistungsfähigkeit des Optimaldetektors

Im Folgenden wollen wir die Leistungsfähigkeit des Optimaldetektors analysieren. Als Maße für die Leistungsfähigkeit von Detektoren zur Signalerkennung dienen die in Abschnitt 7.2 eingeführten Fehlerwahrscheinlichkeiten P_{FA} (7-13) und P_{M} (7-14). Beide sind Funktionen der Entscheidungsschwelle d_{thr} .

7.4.1 Ideale Randbedingungen

Zunächst nehmen wir ideale Randbedingungen an. Diese sind:

• ideale AKF des Präambelsignals, d.h.

$$\rho_{ss}(t) = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi + t) s^*(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0\\ 0 & \text{für } t = kT \text{ mit } k \neq 0 \end{cases}$$
(7-28)

- ideale Abtastzeitpunkte nach dem matched Filter, d.h. $\tilde{\tau} = 0$,
- vor und nach der Präambel kein Nutzsignal, d.h. ausschließlich Gauß'sches Rauschen,
- kein Frequenzversatz ($\nu = 0$) oder perfekte Frequenzkorrektur vor der Filterung.

Später werden wir systematisch den Einfluss nicht idealer Annahmen für jeden einzelnen Parameter analysieren.

Der Zusammenhang zwischen der Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} und der Entscheidungsschwelle ist für AWGN durch (7-26) gegeben. Unter Annahme einer idealen AKF gilt dieser Zusammenhang auch wenn bereits ein Teil der Präambel im Beobachtungsfenster liegt. Für die Verpasserwahrscheinlichkeit benötigen wir noch die WDF für den Betrag der Entscheidungsvariablen d[k] unter der Bedingung \mathcal{H}_1 , dass eine Präambel vollständig im Zeitfenster zwischen $(k-L_0+1)T$ und kT empfangen wurde. Wie für \mathcal{H}_0 ist auch hier die Zufallsvariable *D* Gauß verteilt mit der gleichen Varianz σ_D^2 , jedoch nun mit einem Mittelwert, dessen Betrag durch die Wurzel aus der Nutzleistung gemäß (7-8) gegeben ist. Die WDF des Betrags einer komplexen Gauß verteilten Zufallsvariablen mit einem von Null verschiedenen Mittelwert ist Rice-verteilt. Folglich gilt

$$p_{1}(|d||\mathcal{H}_{1}) = \frac{2|d|}{\sigma_{D}^{2}} \exp\left(-\frac{|d|^{2} + |\mu_{1}|^{2}}{\sigma_{D}^{2}}\right) \cdot I_{0}\left(2\frac{|d| \cdot |\mu_{1}|^{2}}{\sigma_{D}^{2}}\right)$$
(7-29)

mit dem Mittelwertbetrag

$$\left|\mu_{1}\right| = \sqrt{\frac{E_{\rm P}}{T}} \,. \tag{7-30}$$

Darin ist E_P die Empfangsenergie der Präambel, *T* die Symboldauer und I₀(.) die bereits bekannte modifizierte Besselfunktion der Ordnung Null (siehe auch Kapitel 4, Abschnitt 1). Die Verpasserwahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch

$$P_{\rm M} = \int_{0}^{d_{\rm thr}} p_1(x|\mathcal{H}_1) dx = \int_{0}^{d_{\rm thr}} \frac{2x}{\sigma_D^2} \exp\left(-\frac{x^2 + |\mu_1|^2}{\sigma_D^2}\right) \cdot I_0\left(2\frac{x \cdot |\mu_1|^2}{\sigma_D^2}\right) dx \,.$$
(7-31)

Für das Integral gibt es keine analytisch darstellbare Lösung. Es muss numerisch ausgewertet werden.

In Abb. 7-4 sind die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der Entscheidungsschwelle aufgetragen. Die Verpasserwahrscheinlichkeit ist abhängig vom Mittelwert μ_1 , der durch die Präambelempfangsenergie E_P gemäß (7-30) bestimmt ist. Da $E_P = L_0 E_S$ gilt (mit E_S als Empfangsenergie pro Symbol), besteht zwischen dem Verhältnis $|\mu_1|/\sigma_D$ in der Entscheidungsvariablen und dem Verhältnis E_S/N_0 am Detektoreingang der Zusammenhang

$$\frac{|\mu_1|^2}{\sigma_D^2} = L_0 \frac{E_{\rm S}}{N_0}.$$
(7-32)

Es fällt auf, dass die Kurven für $P_{\rm M}$ für verschiedene Mittelwerte etwa die gleiche Form haben und nur horizontal gegeneinander verschoben sind (für $|\mu_1|/\sigma_D > 4$). Dafür gibt es eine anschauliche Begründung: Wir betrachten einen Mittelwert mit einem großen Betrag in der komplexen Ebene. Dann hat offensichtlich die radiale Rauschkomponente (in Richtung des komplexen Zeigers μ_1) größeren Einfluss auf den Betrag der Zufallsvariablen als die tangentiale Komponente. Für betragsmäßig sehr große Mittelwerte verschwindet der Einfluss der Tangentialkomponente vollständig. Die Radialkomponente ist aber Gauß verteilt um den Mittelwert μ_1 herum und hat die Varianz $\sigma_D^2/2$. Dies ist in Übereinstimmung mit der bekannten Eigenschaft von Rice-Verteilungen, die für große Verhältnisse $|\mu_1|/\sigma_D$ asymptotisch gegen Gaußverteilungen konvergieren. Deswegen kann (7-31) approximiert werden durch

$$P_{\rm M} \approx \int_{-\infty}^{d_{\rm thr}} \frac{1}{\sigma_D \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\left(x - |\mu_1|\right)^2}{\sigma_D^2}\right) dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|\mu_1| - d_{\rm thr}}{\sigma_D}\right) \operatorname{für} |\mu_1| >> \sigma_D.$$
(7-33)



Darin ist erfc(.) die komplementäre Gauß'sche Fehlerfunktion.

Abb. 7-4: Verpasserwahrscheinlichkeit (durchgezogen) und Vortäuschungswahrscheinlichkeit (gestrichelt) des Optimaldetektors bei unbekannter Phase in Abh. von der Entscheidungsschwelle d_{thr} ; Parameter: Mittelwert μ_1 gemäß (7-30) in der Entscheidungsvariablen bei Vorhandensein einer Präambel

Bemerkenswert ist auch, dass von der Präambel nur deren Energie in die Verpasserwahrscheinlichkeit eingeht. Da die Energie sich aus dem Produkt der Leistung des Empfangssignals und der Präambeldauer L_0T ergibt, hat man beim Systementwurf die Wahl zwischen einer kurzen Präambel (kleines L_0) mit hoher Leistung oder einer langen Präambel (großes L_0) mit niedriger Leistung.

In einem ausgewogenen Systementwurf wird man die Präambel mit gleicher Leistung wie die Nutzdaten senden. Ferner ist man i.A. daran interessiert, dass das E_S/N_0 (mit E_S = Symbolenergie), das zur Telegrammdetektion erforderlich ist, nicht primär durch die Präambeldetektion begrenzt wird. (Die Telegrammdetektion setzt sich zusammen aus der Präambeldetektion und der Detektion der nachfolgenden Nutzdaten). Die Präambeldetektion sollte i.A. also zuverlässiger sein als die nachfolgende Nutzdatendetektion. Man ermittelt zunächst für die Datendetektion ein erforderliches E_S/N_0 z.B. für eine gewünschte Blockfehlerwahrscheinlichkeit P_{bl} . Bei diesem E_S/N_0 sollte $P_M < P_{bl}$ sein. Aus vorgegebenen Werten für P_{FA} , P_M und einem E_S/N_0 , bei dem diese Werte einzuhalten sind, ergibt sich die erforderlich Präambellänge L_0 .

Beispiel 7.2:

Gegeben sei ein Telemetriesystem mit folgenden Sendeparametern:

- Symbol rate: 10^3 Symbole/s
- Telegrammlänge (inkl. Präambel): N = 100 QPSK-Symbole
- Länge der Präambel: $L_0 = 36$ QPSK-Symbole

- Tastverhältnis (engl.: Duty cycle): $d_c = 10^{-3}$
 - (= Verhältnis von Sendedauer zur Summe aus Sendedauer und mittlerer Pausendauer)
- erforderlich sei ein $E_{\rm S}/N_0 = 1$ (0 dB), um eine Blockfehlerwahrscheinlichkeit von 10% nicht zu überschreiten.

Gewünscht: Im Mittel maximal eine Vortäuschung in 10 Perioden

Ermittlung der Entscheidungsschwelle:

- Bei Abtastung im Symboltakt gibt es $N_{\rm P} = N/d_{\rm c} = 10^5$ Abtastwerte pro Periode, d.h. 10⁶ Werte in 10 Perioden; $\Rightarrow P_{\rm FA} = 10^{-6}$.
- Entscheidungsschwelle aus Abb. 7-4 (gestrichelte Kurve): $d_{thr}(P_{FA}=10^{-6}) = 3.7 \sigma_D$.

Ermittlung der Verpasserwahrscheinlichkeit:

- Für $E_{\rm S}/N_0 = 1$ folgt aus (7-32) mit $L_0 = 36$: $|\mu_1|/\sigma_D = 6$. Aus Abb. 7-4 liest man $P_{\rm M} = 4 \cdot 10^{-4}$ ab.
- Für $P_{\rm M} \approx P_{\rm bl} = 0,1$ ergäbe sich durch lineare Interpolation zwischen den Kurven für $|\mu_1|/\sigma_D = 4$ und $|\mu_1|/\sigma = 6$ aus Abb. 7-4 für $d_{\rm thr} = 3,7\sigma_D$: $|\mu_1|/\sigma_D \approx 4,6$. Dafür ergäbe sich aus (7-32): $L_0 \approx 22$. Man könnte die Präambel also etwas kürzer wählen.

7.4.2 Nicht ideale Präambel-AKF

Eine ideale Präambel-AKF hat gemäß (7-28) nur für einen Abtastzeitpunkt einen von Null verschiedenen Wert. Wir wollen nun untersuchen, inwieweit diese Annahme bei linearer Modulation realistisch ist und welche Auswirkungen es hat, wenn sie nicht erfüllt ist.

Für linear modulierte Signale lässt sich leicht zeigen, dass deren AKF als Faltung der AKF $\rho_{gg}(t)$ des Modulationsgrundimpulses g(t) mit der zeitdiskreten AKF $\rho_{aa}[k]$ der Symbolfolge $a[0], a[1], \ldots, a[L_0-1]$ darstellbar ist. Mit $\rho_{aa}[k]$ ist hier die aperiodische AKF gemeint. Sie ergibt sich, wenn man die Symbolfolge zu beiden Seiten mit Null-Symbolen ergänzt. Es gilt also

$$\rho_{ss}(t) = \sum_{i=1-L_0}^{L_0-1} \rho_{gg}(t-iT)\rho_{aa}[i]$$
(7-34)

mit

$$\rho_{aa}[i] = \frac{1}{E_a} \sum_{\kappa=0}^{L_0 - 1} a[\kappa + i] a^*[\kappa], \text{ wobei } a[k] = 0 \text{ für } k < 0 \text{ und } k \ge L_0$$
(7-35)

und

$$\rho_{gg}(t) = \frac{1}{E_g} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta + t) g^*(\vartheta) d\vartheta.$$
(7-36)

Darin ist E_g die Energie des Grundimpulses und $E_a = \sum_{\kappa=0}^{L_0-1} |a[\kappa]|^2$ die Energie der Symbolfolge. Eine ideale AKF bei Abtastung im Symboltakt ergibt sich, wenn g(t) die Nyquist-Eigenschaft

$$\rho_{gg}(kT) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0\\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$
(7-37)

hat und für die AKF der Präambelsymbole

$$\rho_{aa}[i] = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0\\ 0 & \text{für } i \neq 0 \end{cases}$$
(7-38)

gilt. Außerdem muss der Abtastzeitpunkt noch optimal passen. Bedauerlicher Weise gibt es keine endlichen Symbolfolgen mit dieser Eigenschaft. Die besten binären Folgen (mit BPSK-Symbolen) sind die nach ihrem Entdecker benannten Barker-Folgen.

Für Barkerfolgen gilt
$$|\rho_{aa}[i]| \le 1/L_0$$
 für $i \ne 0.$ (7-39)

Es gibt aber nur 7 Barkerfolgen mit den Längen $L_0 \in \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13\}$. Präambeln benötigen i.A. aber eine wesentlich größere Länge (siehe obiges Beispiel). Daher sind Barkerfolgen für Präambelsequenzen nicht interessant.

We sentlich umfangreicher ist das Angebot an Mehrphasenfolgen, wenn man sich auf $|\rho_{aa}[i]| \le 3/L_0$ für $i \ne 0$ beschränkt.

Prinzipiell besteht bei nicht-idealen AKFen das Risiko, dass eines der Nebenmaxima über der Entscheidungsschwelle liegt und damit eine falsche Präambellage vorgetäuscht wird. Nebenmaxima erhöhen also die Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} . Dies ist insbesondere signifikant, wenn das Nutzsignal mit hoher Leistung empfangen wird und dadurch die Entscheidungsvariable an den Stellen der Nebenmaxima ein hohes Verhältnis $|\mu_0|/\sigma_D$ aufweist, wobei $|\mu_0|$ die Amplitude des Nebenmaximums bezeichnet. Jedoch lässt sich dieses Risiko durch eine einfache Modifikation des Detektionsalgorithmus sehr klein halten.

Erweiterung der reinen Schwellwertdetektion:

Sei k_0 ein Zeitpunkt, für den $|d[k_0]| > d_{\text{thr}}$ gilt. Dann betrachtet man die L_0-1 folgenden Werte $|d[\kappa]|$ für $k_0 < \kappa < k_0+L_0$ und wählt das Maximum aus $|d[k_0]|$ und diesen Werten aus. Sofern an der Stelle k_0 ein Nebenmaximum der Präambel-AKF war, markiert der Zeitindex des Maximums aus den L_0 Werten mit hoher Sicherheit die Lage des Maximums der AKF. Voraussetzung dafür ist, dass die AKF die Eigenschaft $|\rho_{aa}[i]| \ll 1$ für $i \neq 0$ besitzt.

Obwohl die AKF realisierbarer Präambeln nicht-ideal ist und prinzipiell die Vortäuschungswahrscheinlichkeit $P_{\rm M}$ erhöht, so lässt sich deren Einfluss mit der beschriebenen Maßnahme auf eine vernachlässigbare Größenordnung reduzieren. Die Annahme idealer AKF zur Leistungsanalyse ist dann durchaus gerechtfertigt.

7.4.3 Nicht optimale Abtastzeitpunkte

Die Annahme optimaler Abtastzeitpunkte ist unrealistisch. Im Allgemeinen ist der Abstand zwischen zwei empfangenen Telegrammen zu groß, als dass die Abtastphase vom vorhergehenden Telegramm übernommen werden könnte. Im Allgemeinen ist a priori auch nicht bekannt, von welchem Sender das nächste Telegramm erwartet wird. Man hat also keinerlei Informationen über die optimale Abtastphase. Wie im Kapitel 1 bereits ausführlich dargelegt wurde, führt dies in den Abtastwerten nach dem auf g(t) angepassten Filter (s. Abb. 7-2) zu einer Reduktion des Nutzanteils und zu Intersymbolinterferenzen.

Intersymbolinterferenzen können bei der Präambeldetektion i.A. vernachlässigt werden, wenn die Korrelationsnebenmaxima von $\rho_{aa}[i]$ betragsmäßig sehr klein gegenüber dem Maximum sind. Außerdem haben die Intersymbolinterferenzen nur eine statische Veränderung des Nutz-

anteils zur Folge, da die Symbole deterministisch sind. Bei idealer AKF gemäß (7-38) verschwinden die Intersymbolinterferenzen vollständig und der Nutzanteil in der Entscheidungsvariablen d[k] ist durch Abtastwerte der AKF $\rho_{gg}(t)$ des Modulationsgrundimpulses g(t) gegeben. Die Reduktion des Nutzanteils in der Amplitude der Entscheidungsvariablen kann durch einen Verlustfaktor $f_{\tau} < 1$ ausgedrückt werden. Der Zusammenhang aus (7-32) muss entsprechend erweitert werden:

$$\frac{|\mu_1|^2}{\sigma_D^2} = L_0 \frac{E_{\rm s}}{N_0} f_{\tau}^2.$$
(7-40)

Wie klein dieser Faktor im schlimmsten Fall werden kann, wird für zwei Beispiele anschaulich in Abb. 7-5 demonstriert.



a) Abtastung im Symboltakt; ungünstigste Abtastzeitpunkte: $\pm T/2$



b) Abtastung im doppelten Symboltakt; ungünstigste Abtastzeitpunkte: $\pm T/4$

Abb. 7-5: Reduktion der Nutzamplitude in der Entscheidungsvariablen bei ungünstigster Abtastphase

Bei Abtastung im Symboltakt kann die Nutzamplitude also bis zur Hälfte reduziert werden. Das bedeutet bis zu 6 dB Verlust im Signal-zu-Rauschleistungsverhältnis. Bei doppelter Abtastrate reduziert sich die Nutzamplitude beim Rechteckimpuls nur noch auf das 0,75-fache (= 2,5 dB Verlust) bzw. beim RRC-Impuls auf das 0,85...0,9-fache (= 1,4...0,9 dB Verlust).

Hinzu kommt noch eine Erhöhung der Vortäuschungswahrscheinlichkeit, wenn die Präambel nur teilweise im Beobachtungsfenster liegt, da die Nyquist-Eigenschaft bei nicht optimalen Abtastzeitpunkten verloren geht. Dieser Verlust kann aber mit der am Ende des vorangegangenen Abschnitts beschriebenen Methode vernachlässigbar klein gehalten werden.

Nach erkannter Präambel kann man mit den im Kapitel 6 beschriebenen Methoden einen guten Schätzwert für die optimale Abtastphase ermitteln, der zur Detektion der nachfolgenden Datensymbole verwendet werden kann.

7.4.4 Nutzdaten nach der Präambel

Bisher wurde angenommen, dass die Trainingssequenz ohne weitere Nutzdaten gesendet wurde. Dies ist ein typisches Radar-Szenario. Telegramme beinhalten aber immer auch einen Datenteil. Sie bestehen entweder aus einer Präambel, der ein Signal mit Nutzdaten folgt oder einer Midambel, der Nutzdaten vorangehen und folgen. Diese Nutzdaten beeinflussen das Signal d(t) und erhöhen prinzipiell die Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} sofern man den Schwellwert d_{thr} nicht anpasst.

Zur Analyse des Dateneinflusses knüpfen wir an die Betrachtungen von Abschnitt 7.4.2 an. Dort haben wir festegestellt, dass sich der Nutzanteil in der Entscheidungsvariablen als Faltung der AKF des Modulationsgrundimpulses mit der Faltung der AKF der Präambelsymbole darstellt. Die Beziehung (7-34) gilt auch hier, jedoch ist in der Definition von $\rho_{aa}[i]$ gemäß (7-35) nun zu fordern, dass a[k] für $k \ge L_0$ eine diskrete Zufallsvariable darstellt, die die Elemente des Symbolalphabets mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen kann. Die so modifizierte Korrelationsfunktion sei mit $\rho'_{aa}[i]$ bezeichnet. Es gilt

$$\rho_{aa}'[i] = \frac{1}{E_a} \sum_{\kappa=0}^{L_0-1} a[\kappa+i] a^*[\kappa] \text{ mit } a[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0\\ \text{Präambelsymbole} & \text{für } 0 \le k < L_0 \\ A (Zufallsvariable) & \text{für } k \ge L_0 \end{cases}$$
(7-41)

 E_a bezeichnet nach wie vor die Energie der Präambelsymbolfolge. Für i > 0 besteht $\rho'_{aa}[i]$ aus der Summe der aperiodischen AKF $\rho_{aa}[i]$ und einer Summe von min $\{i, L_0\}$ statistisch unabhängigen Zufallsvariablen. Da $\rho_{aa}[i]$ Zufallselemente enthält, wird es selbst zu einer Zufallsvariablen. Für $i \ge L_0$ werden genau L_0 Zufallsvariable addiert.

Der Mittelwert von $\rho'_{aa}[i]$ ist gleich dem von $\rho_{aa}[i]$, da die Zufallsvariable A mittelwertfrei ist.

Die Abschätzung der Varianz ist nicht ganz so einfach und erfordert eine tiefer gehende Betrachtung. Vereinfachend nehmen wir M-PSK als Modulation für Präambel- und Datensymbole mit der Amplitude 1 an. Dann ist $\sigma_A^2 = 1$ und $E_a = L_0$. Für statistisch unabhängige Zufallsvariable ist die Varianz der Summe gegeben durch die Summe der Varianzen. Da alle Varianzen gleich sind, folgt

$$\sigma_{\rho[i]}^{2} = \frac{\sigma_{A}^{2}}{L_{0}^{2}} \cdot \min\{i, L_{0}\} = \frac{1}{L_{0}} \min\{\frac{i}{L_{0}}, 1\}.$$
(7-42)

Die Varianz nimmt beginnend mit Null für i = 0 also linear mit i zu und erreicht für $i = L_0$ den Maximalwert von $1/L_0$. Um die Auswirkung auf die Entscheidungsvariable zu erhalten, müsste noch die Faltung mit der AKF des Modulationsimpulses gemäß (7-34) betrachtet werden. Zur Abschätzung begnügen wir uns hier mit der vereinfachenden Annahme einer idealen Abtastphase und der Nyquist-Eigenschaft (7-37). Dann ist die Varianz der gesamten Störung verursacht durch Rauschen und zufälligen Datensymbolen in der Entscheidungsvariablen nach (7-12) nämlich gegeben durch

$$\sigma_{D}^{2} = \frac{N_{0}}{T} + \frac{E_{P}}{T} \frac{1}{L_{0}} \min\left\{\frac{i}{L_{0}}, 1\right\}$$
$$\leq \frac{N_{0}}{T} \left(1 + \frac{E_{S}}{N_{0}}\right) \qquad (7-43)$$

Darin wurde $E_P = E_S \cdot L_0$ mit E_S als Energie pro Symbol substituiert. Bei Anwesenheit von Datensymbolen wird die Rauschleistung N_0/T durch die Datensymbole also um einen Faktor erhöht, der im ungünstigsten Fall $1+E_S/N_0$ beträgt.

Abb. 7-6 zeigt quantitativ für $E_S/N_0 \in \{1,2\}$ den Einfluss von Datensymbolen auf die Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} für $i \ge L_0$. Während die Kurven für die Verpasserwahrscheinlichkeit P_M wie oben dargelegt mit zunehmenden E_S/N_0 im Wesentlichen parallel verschoben werden, werden die Kurven für P_{FA} gedehnt.

Bei einem vorgegebenen $P_{\rm FA}$ müsste die Entscheidungsschwelle $d_{\rm thr}$ also um genau den Faktor $\sqrt{E_{\rm S}/N_0 + 1}$ höher gewählt werden als ohne Datensymbole. Dazu muss für $E_{\rm S}/N_0$ aber ein Schätzwert vorliegen, was bei Telegrammen mit Präambeln aber gar nicht möglich ist: Vor der Präambeldetektion weiß der Empfänger nichts über das $E_{\rm S}/N_0$. In diesem Fall ist eine Erhöhung der Entscheidungsschwelle aber auch gar nicht nötig. Weil die Präambel vor dem Datenteil empfangen wird, empfängt der Detektor die meiste Zeit also ein reines Rauschsignal und nur für dieses muss $P_{\rm FA}$ klein sein. Hat er erstmals eine Präambel mit der niedrigen Entscheidungsschwelle erkannt, kann aus der Amplitude der Entscheidungsvariablen auf das $E_{\rm S}/N_0$ geschlossen werden und die Entscheidungsschwelle könnte für die restliche Telegrammdauer die Entscheidungsschwelle um den Faktor $\sqrt{1 + E_{\rm S}/N_0}$ erhöht werden.



Abb. 7-6: Auswirkung von Datensymbolen auf die Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} (gestrichelte Linien). Zum Vergleich sind die Kurven mit gleichem E_{S}/N_0 für eine Präambellänge von $L_0 = 32$ mit dargestellt (durchgezogene Linien)

Ein Abschalten des Detektors während der Nutzdatendetektion wäre auch eine Option. In Sensornetzen gibt es aber i.A. viele Sensorknoten, die alle unsynchronisiert auf derselben Frequenz senden. Dann kann es zu Telegrammkollisionen kommen. Während ein Telegramm decodiert wird, kann ein Telegramm eines anderen Senders eintreffen. Dann gibt es folgende drei Möglichkeiten:

- 1. Die Empfangsleistung des zweiten Telegramms ist deutlich kleiner als die des ersten. Dann kann man möglicher Weise das stärkere erste Telegramm noch fehlerfrei decodieren. Bei einer gewissen Überlappungslänge wäre das schwächere zweite Telegramm dann ohnehin nicht mehr fehlerfrei decodierbar. Dann macht es auch keinen Sinn, dessen Präambel erkennen zu wollen.
- 2. Die Empfangsleistungen beider Telegramme liegen nahe beieinander und der Überlappungsbereich ist so groß, dass beide nicht decodierbar sind. Dann macht es ebenfalls keinen Sinn, die Präambel des zweiten noch erkennen zu wollen.
- 3. Die Empfangsleistung des zweiten Telegramms ist deutlich größer als die des ersten. Bei einer gewissen Überlappungslänge wäre das schwächere erste Telegramm dann nicht mehr fehlerfrei decodierbar. Es bestünde aber die Chance, wenigstens das zweite fehlerfrei zu decodieren. Dies wäre der einzige Fall, in dem es sinnvoll wäre, den Präambeldetektor weiter laufen zu lassen, nun aber mit einer höheren Entscheidungsschwelle. Da aber nur Telegramme gesucht werden, deren Leistungen größer als die des bereits erkannten sind, ist die Erhöhung der Entscheidungsschwelle unkritisch.

Neben dieser Anwendung gibt es auch Systeme, in denen kontinuierlich gesendet wird und hin und wieder eine Trainingssequenz eingestreut ist. Im Zuge der Anfangssynchronisation muss ein Detektor diese erst finden. In diesem Fall wird der Detektor zwar durch die Daten permanent gestört und man sollte die Entscheidungsschwelle entsprechend der geschätzten Empfangsleistung gegenüber reinem Rauschen erhöhen. Andererseits kommt die Trainingssequenz in gewissen Abständen aber immer wieder vor, so dass ein Verpassen einer Trainingssequenz nicht dramatisch ist. Man kann also eine wesentlich höhere Verpasserwahrscheinlichkeit tolerieren.

Diese Betrachtungen sollen verdeutlichen, dass die Wahl der Parameter von System zu System sehr unterschiedlich sein kann.

7.5 Präambelerkennung bei unbekanntem Frequenzversatz zwischen Sender und Empfänger

In einem Telemetriesystem mit unbekannter Ankunftszeit der Telegramme ist die Annahme einer perfekten Frequenzsynchronisation unrealistisch. Die Differenz zwischen den Frequenzen des Sende- und des Empfangsoszillators kommen in vollem Umfang zum Tragen. Würde die maximal mögliche Frequenzdifferenz nur eine geringe Phasendifferenz über die Dauer der Trainingssequenz verursachen, wären keine besonderen Maßnahmen erforderlich. Die Symbolraten in Telemetriesystemen sind i.A. aber sehr niedrig und liegen höchstens in der Grö-Benordnung von einigen 1000 Symbolen pro Sekunde, so dass die Trainingssequenzen eine Dauer von mehreren ms haben. Die maximale Frequenzabweichung müsste dann unter 100 Hz liegen. In den Sendern werden aber aus Kostengründen billige Quarze mit einer Frequenztoleranz von ca. 10⁻⁵ eingesetzt. Beträgt die Trägerfrequenz z.B. 400 MHz, bedeutet dies eine Frequenzabweichung von 4 kHz. Hinzu kommt noch die Frequenztoleranz des Empfangsoszillators, die im ungünstigsten Fall die Frequenzablage noch weiter erhöht.

Um die Präambel auch bei relativ hohem Frequenzversatz erkennen zu können, muss das Filter aus Abb. 7-2 erweitert werden. Dazu können wir Erkenntnisse verwenden, die wir im Rahmen der Daten-gestützten Frequenzschätzung in Kapitel 4 gewonnen haben. Zur Erinnerung: Der ML-Frequenzschätzer basiert auf den Abtastwerten nach der auf g(t) angepassten Filterung. Sie werden mit den konjugiert komplexen Trainingssymbolen multipliziert und anschließend einer diskreten Fourier-Transformation (DFT) unterzogen. Diese liefert äquidistante Abtastwerte einer modifizierten Likelihoodfunktion über der Frequenzablage. Aus dem Wert mit dem maximalen Betrag und seiner beiden nächsten Nachbarn kann dann der ML-Schätzwert für die Frequenzablage mit hinreichender Genauigkeit gewonnen werden. Diesen Algorithmus können wir zur Präambeldetektion verwenden. Da die zeitliche Lage der Präambel aber nicht bekannt ist, müssen wir die DFT für alle möglichen Zeitfenster der Länge L_0T durchführen, die im Abstand der Abtastwerte gegeneinander verschoben sind. Erst wenn die zeitliche Lage eines Fensters mit der Präambel eines empfangenen Telegramms übereinstimmt, wird sich der Betrag eines DFT-Wertes deutlich von allen anderen abheben.

Das Blockschaltbild für die erforderliche Signalverarbeitung bei Einfachabtastung zeigt Abb. 7-7. Die Im Symbolabstand *T* vorliegenden L_0 Abtastwerte werden mit den konjugiert komplexen Präambelsymbolen multipliziert und anschließend mittels der DFT in den Frequenzbereich transformiert. Um einerseits den schnellen FFT-Algorithmus anwenden zu können, andererseits genügend dichte Abtastwerte im Frequenzbereich zu bekommen, wird mit einem Block von $N-L_0$ Nullen auf die DFT-Länge N (Zweierpotenz) aufgefüllt. Als Entscheidungsvariable dient nun das Maximum des Betrages der DFT-Ausgangswerte. Erst wenn dieses Maximum über der Entscheidungsschwelle liegt, gilt eine Präambel als erkannt. Der Frequenzindex i_0 dieses Maximums markiert dann die wahrscheinlichste Frequenzablage und der Zeitindex k_0 , bei dem das Maximum die Schwelle überschreitet, markiert das Ende der Präambel. Aus den jeweils zugehörigen Abtastwerten und ihrer beiden nächsten Nachbarn können anschließend die ML-Schätzwerte für Frequenz und Abtastphase mittels Polynominterpolation gewonnen werden (siehe Kap. 4.1.2.1 und Kap. 6.1).



Abb. 7-7: Präambelerkennung bei unbekannter Frequenzablage mit ML-Parameterschätzung

Es lässt sich zeigen, dass auch dieser Algorithmus ein optimaler Detektor für Präambeln bei unbekannter Frequenzablage im Sinne des Neyman-Pearson-Kriteriums ist.

Wir wollen abschließend noch die Leistungsfähigkeit dieses Schätzers analysieren. Zur Berechnung der Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} nehmen wir wieder an, dass nur weißes

Gauss'sches Rauschen am Detektoreingang anliegt. Erfüllt der Modulationsimpuls die Nyquist-Bedingung, sind Abtastwerte nach der auf g(t) angepassten Filterung statistisch unabhängig voneinander. Die Multiplikation mit den konjugiert komplexen Präambelkoeffizienten ändert an den statistischen Eigenschaften nichts. Nach dem Auffüllen mit Nullen und der Anwendung der DFT ergeben sich wieder komplex Gauß-verteilte Werte. Da sie auch mittelwertfrei sind, sind ihre Beträge Rayleigh-verteilt. Würde man genau die L_0 Werte - ohne mit Nullen aufzufüllen - einer DFT unterziehen, wären die DFT-Ausgangswerte statistisch unabhängig voneinander. Dann ergäbe sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Betragsmaximums aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Zufallsvariablen.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer einzelnen Rayleigh-verteilten Zufallsvariablen D ist gegeben durch

$$\Pr\{D \le d_{thr}\} = 1 - P_{FA} = 1 - \exp\left(-\frac{d_{thr}^2}{\sigma_D^2}\right).$$
(7-44)

Für das Maximum von L_0 statistisch unabhängigen Rayleigh-verteilten Zufallsvariablen gilt dann

$$\Pr\left\{\max\left\{D_{0}, D_{1}, ..., D_{L_{0}-1}\right\} \le d_{\text{thr}}\right\} = \left(1 - \exp\left(-\frac{d_{\text{thr}}^{2}}{\sigma_{D}^{2}}\right)\right)^{L_{0}}.$$
(7-45)

Die Vortäuschungswahrscheinlichkeit als Funktion von der Entscheidungsschwelle d_{thr} ist die komplementäre Funktion von (7-45) und somit gegeben durch

$$P_{\rm FA} = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{d_{\rm thr}^2}{\sigma_D^2}\right)\right)^N \text{ für } N = L_0.$$
(7-46)

Für $N > L_0$ sind die DFT-Ausgangswerte korreliert und die Berechnung gestaltet sich wesentlich aufwändiger. (7-46) kann aber als obere Schranke dienen, die gleichzeitig eine gute Näherung darstellt, sofern $N \le 4L_0$ gilt. Grundsätzlich steigt P_{FA} mit der DFT-Länge an.

In Abb. 7-8 ist der Zusammenhang (7-46) graphisch dargestellt. Es wird deutlich, dass durch die Maximumbildung über *N* Werte die Entscheidungsschwelle deutlich angehoben werden muss. Für N = 64 ist bei $P_{\text{FA}} = 10^{-4}$ eine Anhebung von 3 auf ca. 3,6 notwendig. Entsprechend ist ein um 0,6 höheres Verhältnis $|\mu_1|/\sigma_D$ erforderlich, um die Verpasserwahrscheinlichkeit beizubehalten. Die Präambeldetektion bei unbekannter Frequenzablage benötigt generell eine etwas höheres Signal- zu Rauschleistungsverhältnis im Vergleich zum Detektor ohne Frequenzablage.



Abb. 7-8: Vortäuschungswahrscheinlichkeit P_{FA} bei Präambelerkennung mit unbekannter Frequenzablage nach Abb. 7-1; Parameter: DFT-Länge N (P_M bleibt unverändert)

Aus Abb. 7-8 wird auch deutlich, dass eine Verdoppelung der DFT-Länge und der Präambellänge von 32 auf 64 nur noch eine geringe Degradation zur Folge hat. Die Vortäuschungswahrscheinlichkeit wird etwa verdoppelt. Dies gilt in guter Näherung auch, wenn man die Präambellänge mit $L_0 = 32$ unverändert lässt.

Bei unbekannter Frequenzablage wird der Zusammenhang zwischen dem Verhältnis $|\mu_1|/\sigma_D$ in der Entscheidungsvariablen und dem Verhältnis E_S/N_0 am Detektoreingang noch durch zwei weitere Effekte beeinflusst, die durch zwei weitere Leistungsverlustfaktoren f_2 und f_3 berücksichtigt werden können. Zusammen mit dem bereits bekannten Verlustfaktor f_1 wegen nicht optimaler Abtastzeitpunkte gilt

$$\frac{\left|\mu_{1}\right|^{2}}{\sigma_{D}^{2}} = L_{0} \frac{E_{\rm S}}{N_{0}} f_{1} f_{2} f_{3} \,. \tag{7-47}$$

Ein Effekt entsteht dadurch, dass das Maximum der Likelihoodfunktion i.A. nicht in den DFT-Ausgangswerten enthalten ist. Im ungünstigsten Fall gibt es Abtastwerte bei $\pm 2/(NT)$ symmetrisch zum Maximum. Zur Abschätzung der Auswirkung auf die Amplitude erinnern wir uns, dass die Likelihoodfunktion in der Nähe des Maximums durch eine $\sin x/x$ -Funktion mit Nullstellen bei ganzzahligen Vielfachen von vT/L_0 abseits des Maximums beschrieben werden kann. Somit ergibt sich im ungünstigsten Fall (also bei Abtastung symmetrisch zum Maximum) ein Leistungsverlust von

$$f_2 = \left(\frac{2N}{\pi L_0} \sin \frac{\pi L_0}{2N}\right)^2.$$
 (7-48)

Für $N = 2L_0$ ergibt sich $f_2 = 0.81$.

Der zweite Effekt besteht in einer Reduktion des Maximums der Likelihoodfunktion mit zunehmendem Frequenzabstand. Die Ursache liegt in dem ersten Filter, das mit zunehmendem Frequenzabstand zwischen Sende- und Empfangsoszillator immer weniger vom Nutzsignal passieren lässt. Der allgemeine Zusammenhang bei Wurzel-Kosinusfiltern mit beliebigen Roll-off-Faktor α ist relativ kompliziert (siehe Anhang B). Er ist für verschiedene Roll-off-Faktoren α in Abb. 7-9 dargestellt. Zur Abschätzung möge der Fall $\alpha = 0$ dienen. Dann ist das Betragsspektrum rechteckförmig und die Nutzamplitude nach dem angepassten Filter ist proportional zur Frequenzablage. Bei einer Ablage von einer halben Symbolrate ist die Nutzamplitude bereits halbiert und somit die Nutzleistung um den Faktor $f_3 = 0,25$ reduziert. Für $\alpha > 0$ ist der Faktor zwar etwas größer. Dennoch ist auch hier der Verlust signifikant, weswegen man die maximale Frequenzablage auf etwa ¹/₄ der Symbolrate begrenzen sollte.



Abb. 7-9: Verhältnis f_3 der Nutzleistungen der Signale nach und vor dem auf g(t) angepassten Filter in Abhängigkeit von der Frequenzablage des Empfangssignals bei RRC für verschiedene Roll-off-Faktoren α

Wenn mit größeren Frequenzablagen zu rechnen ist, kann man eine Bank von M parallelen Detektoren nach Abb. 7-7 aufbauen, wobei M sich aus dem Verhältnis von maximal möglicher Frequenzablage (auf Grund der Oszillatortoleranzen) und dem gewählten Schätzbereich Δv_{max} pro Detektor ergibt. Das Eingangssignal für den Detektor m (m = 0, 1, ..., M-1) muss dann um die Frequenz (m-M/2+1/2) Δv_{max} verschoben werden. Vor einer Entscheidung muss das Maximum über die Beträge der Entscheidungsvariablen aller parallelen Detektoren gebildet werden. Der maximale Schätzbereich beträgt dann $\pm \Delta v_{\text{max}} M/2$. Durch diese Parallelschaltung wird natürlich die Vortäuschungswahrscheinlichkeit weiter erhöht, da nun das Maximum aus $M \cdot N$ Rayleigh-verteilten Zufallsvariablen gebildet wird. Dies ist der Preis, der für sehr große Frequenzablagen zu zahlen ist.

8 Kanalschätzung für Einträgermodulation

Bisher haben wir ausschließlich einfache, nicht verzerrende Kanäle betrachtet, für die es genügt, die Phase θ und die Verzögerungszeit τ zu schätzen. τ definiert auch gleichzeitig den optimalen Abtastzeitpunkt. In diesem Kapitel wird das Problem der Schätzung der Impulsantwort des Übertragungskanals – kurz als Kanalschätzung bezeichnet – in Systemen mit Einträgermodulation bei linear verzerrenden Kanälen behandelt. Allgemein werden linear verzerrende Kanäle durch ihre Impulsantwort vollständig charakterisiert, können also stets als lineare Filter aufgefasst werden. Ist die zeitliche Ausdehnung der Impulsantwort in der Größenordnung einer Symboldauer oder größer als diese, kommt es zu Intersymbolinterferenzen. Dann ist eine Datendetektion ohne Kenntnis der Impulsantwort des Kanals im Allgemeinen nicht mehr möglich. Bei verzerrenden Kanälen kommt daher der Kanalschätzung eine zentrale Bedeutung zu.

In einem Übertragungssystem setzt sich der beobachtbare Kanal aus mehreren Komponenten zusammen: Dem Pulsformfilter des Senders, dem eigentlichen Übertragungskanal sowie dem Empfangsfilter. Da alle Komponenten lineare Systeme darstellen, ist auch das Gesamtsystem linear und kann durch eine einzige Impulsantwort beschrieben werden, die sich aus der Faltung der Impulsantworten der einzelnen Komponenten ergibt. Wir bezeichnen die Impulsantwort des Gesamtsystems mit $h(\Delta t)$. Für lineare Modulationsverfahren ist dann das Signal x(t) nach dem Empfangsfilter gegeben durch

$$x(t) = \sum_{i} a[i]h(t-iT) + n(t)$$
(8-1)

(s. Abb. 3-4). Für $h(\Delta t) = h_0 e^{j\theta} \cdot \delta(\Delta t - \tau)$ erhält man den Sonderfall des nicht verzerrenden Kanals. In diesem Fall ist die Kanalverzögerung mit dem optimalen Abtastzeitpunkt im Empfänger identisch. Im Fall verzerrender Kanäle müssen wir die Variablen unterscheiden. Die absolute Verzögerungszeit zwischen Sender und Empfänger wollen wir mit Δt bezeichnen. Den relativen Abtastzeitpunkt innerhalb eines Symbolintervalls bezeichnen wir wie bisher auch mit $\tilde{\tau}$ und beschränken seinen Wertebereich auf $0 \leq \tilde{\tau} < T$. Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung treffen wir folgende Annahmen:

- 1. Die Impulsantwort ist kausal ($h(\Delta t) = 0$ für $\Delta t \le 0$),
- 2. die Grundverzögerung des Kanals sei Null (d.h. für ein beliebig kleines $\Delta t > 0$ gilt $|h(\Delta t)| > 0$),
- 3. die Impulsantwort ist zeitlich auf *L* Symbolintervalle begrenzt ($h(\Delta t) = 0$ für $\Delta t > LT$).

Dann hängt das Empfangssignal zu jedem beliebigen Zeitpunkt t von genau L Datensymbolen ab, d.h. die Summe in (8-1) hat maximal L von Null verschiedene Terme. Die im Symboltakt gewonnen Abtastwerte des gefülterten Empfangssignals können dann in der Form

$$x[k] = x(kT + \tilde{\tau}) = \sum_{l=0}^{L-1} a[k-l]h[l] + n[k] \text{ mit } h[l] = h(lT + \tilde{\tau})$$
(8-2)

dargestellt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Abtastwerte h[l] der Kanalimpulsantwort noch von $\tilde{\tau}$ abhängen. Zur Vereinfachung der Notation verzichten wir aber auf die explizite Angabe von $\tilde{\tau}$. Abb. 8-1 veranschaulicht die Verhältnisse.



Abb. 8-1: Beispiel einer Kanalimpulsantwort der Länge 4*T* mit Abtastwerten im Symbolraster

Der Kanal kann dann in Form eines FIR-Filters nach Abb. 8-2 dargestellt werden.



Abb. 8-2: Zeitdiskretes Kanalmodell bei Abtastung im Symboltakt

Zu schätzen sind also die äquidistanten komplexwertigen Abtastwerte h[l] der Kanalimpulsantwort.

Wie bei anderen Schätzverfahren unterscheidet man auch hier

- 1. datengestützte Kanalschätzung,
- 2. entscheidungsgestützte Kanalschätzung und
- 3. datenunabhängige oder auch blinde Kanalschätzung.

Allen gemeinsam ist, dass die Frequenzsynchronisation vorher erfolgen muss. Im Rahmen dieses Kapitels wird ausschließlich die für praktische Anwendungen wichtigste Klasse der Daten-gestützten Kanalschätzung behandelt. Dazu ist es erforderlich, dass das Sendesignal in gewissen Abständen eine Folge bekannter Datensymbole –Pilotsymbole oder Trainingssymbole genannt – enthält, die der Empfänger zur Schätzung der Kanalimpulsantwort verwenden kann. In Mobilfunksystemen ist dies stets gegeben. Zum Beispiel wird in GSM in jedem Zeitschlitz eine Trainingssequenz bestehend aus 26 Symbolen in der Mitte eines jeden Zeitschlitzes übertragen.

8.1 Maximum-Likelihood-Kanalschätzung

Aus der Folge der Abtastwerte x[k] des gefilterten Empfangssignals betrachten wir sämtliche Werte, die nur von Symbolen der Trainingssequenz und nicht von angrenzenden Daten abhängen. Wir lassen den diskreten Zeitindex k bei k = 0 für das erste Symbol der Trainingsse-

quenz beginnen und bei k = K-1 enden (GSM: K = 26), so dass die Werte x[k] für $L-1 \le k < K$ nur von Trainingssymbolen und nicht von Datensymbolen abhängen. In Matrix-Vektor-Notation lässt sich der Zusammenhang kompakt darstellen durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{n} \,. \tag{8-3}$$

Darin ist

$$\mathbf{x} = (x[L-1], x[L], ..., x[K-1])^{\mathrm{T}} \text{ ein Spaltenvektor mit } K-L+1 \text{ Abtastwerten } x[k],$$
$$\mathbf{n} = (n[L-1], n[L], ..., n[K-1])^{\mathrm{T}} \text{ ein Spaltenvektor mit } K-L+1 \text{ Abtastwerten } n[k] \text{ des gefilterten Rauschsignals,}$$

 $\mathbf{h} = (h[0], h[1], ..., h[L-1])^{1}$ ein Spaltenvektor mit den Abtastwerten der Kanalimpulsantwort,

$$\mathbf{A} = \begin{cases} a[L-1] & a[L-2] & \dots & a[0] \\ a[L] & a[L-1] & \dots & a[1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[K-1] & a[K-2] & \dots & a[K-L] \end{cases}$$

eine $K-L+1 \times L$ -Faltungsmatrix bestehend aus den *K* Symbolen der Trainingssequenz.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Rauschvektors **n** ist eine multivariate Gauß-Funktion mit der quadratischen Form $\mathbf{n}^{\mathrm{H}} \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{h})^{\mathrm{H}} \mathbf{\Phi}_{nn}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{h})$ im Exponenten der Exponentialfunktion. Darin ist $\mathbf{\Phi}_{nn}$ die Autokovarianzmatrix des Rauschens.

Im Empfänger liegt x vor und A ist a priori bekannt. Für den ML-Ansatz ist h durch die Schätzhypothese $\tilde{\mathbf{h}}$ zu ersetzen und der Vektor $\hat{\mathbf{h}}$ zu ermitteln, der diese quadratische Form minimiert.

Für statistisch unabhängiges Gauß'sches Rauschen, wie es sich bei einem Empfangsfilter mit Nyquist-Eigenschaft ergibt, ist Φ_{nn} eine Diagonalmatrix mit der Rauschvarianz in den Diagonalelementen. Dann führt der ML-Ansatz auf die Minimierung des Betragsquadrats der Differenz $\mathbf{x} - A\tilde{\mathbf{h}}$. Die ML-Schätzung ist dann identisch mit dem MMSE-Ansatz. Für die ML-Schätzwerte bzw. MMSE-Schätzwerte gilt bei statistisch unabhängigem Rauschen also der Ansatz

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg\min_{\tilde{\mathbf{h}}} \left\{ \left\| \mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}} \right\|^2 \right\}.$$
(8-4)

Differentiation nach $\tilde{\mathbf{h}}$ und Nullsetzen führt auf die Lösung

$$\hat{\mathbf{h}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}$$
(8-5)

mit \mathbf{A}^{H} als hermitesche (= transponiert und konjugiert komplexe) Matrix A. Das Produkt $\mathbf{A}^{H}\mathbf{A}$ ist eine $L \times L$ – Matrix, die wir abkürzend mit \mathbf{R}_{aa} bezeichnen wollen und deren Elemente durch

8 Kanalschätzung

$$r_{\mu\nu} = \sum_{k=L}^{K} a^* [k - \mu] a [k - \nu] \qquad \text{für } \mu, \ \nu = 1, 2, ..., L. \quad (8-6)$$

gegeben sind. $r_{\mu\nu}$ kann als eine Art Korrelationswert interpretiert werden.

Aus der Beziehung (8-5) können einige Kriterien zum Entwurf geeigneter Trainingssequenzen hergeleitet werden. Damit eine Lösung nach (8-5) existiert, muss \mathbf{R}_{aa} zum Beispiel vollen Rank besitzen, darf also auf keinen Fall singulär sein. Weiterhin ist anzustreben, dass die Nebendiagonalelemente möglichst klein, idealer Weise Null werden. Dies ergibt sich aus einer näheren Analyse der Rauschvarianz in den einzelnen Schätzwerten:

(8-3) in (8-5) eingesetzt ergibt

$$\hat{\mathbf{h}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\left(\mathbf{A}\mathbf{h}+\mathbf{n}\right)$$
$$= \mathbf{h} + \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{n} \qquad (8-7)$$

Der Schätzfehler ist definiert durch

$$\Delta \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{n}.$$
(8-8)

Die Autokovarianzmatrix des Schätzfehlers erhält man aus

$$\mathbf{E}\left[\Delta\mathbf{h}\cdot\Delta\mathbf{h}^{\mathrm{H}}\right] = \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\right]$$
$$= \left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{E}\left[\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{H}}\right]\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}$$
$$= \sigma_{N}^{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}\underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1}}_{\text{Einheitsmatrix}}$$
$$= \sigma_{N}^{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\right)^{-1} = \sigma_{N}^{2}\mathbf{R}_{aa}^{-1} \qquad (8-9)$$

Die Rauschvarianz im Kanalkoeffizienten h[l] ist gegeben durch das l+1-te Diagonalelement der Matrix $E[\Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{h}^{H}]$. Gemäß der letzten Zeile aus (8-9) errechnet sich dies aus der Multiplikation von σ_{N}^{2} mit dem l+1-ten Diagonalelement von \mathbf{R}_{aa}^{-1} . Von besonderem Interesse sind nun Trainingssequenzen, für die die Summe aller Diagonalelemente – also die Spur der Matrix \mathbf{R}_{aa}^{-1} – minimal ist. Derartige Trainingssequenzen werden als optimal im Sinne der ML-Schätzung bezeichnet.

Nun gilt folgender Satz (ohne Beweis):

Sei **A** eine beliebige komplexwertige *M*×*N*-Matrix und **R** = **A**^H**A**. Dann gilt Spur $\{\mathbf{R}^{-1}\} \ge \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_{ii}}$ mit Gleichheit dann und nur dann, wenn **R** eine Diagonalmatrix ist.

Die Spur der Matrix $E[\Delta \mathbf{h} \cdot \Delta \mathbf{h}^{H}]$ kann als Gesamtschätzfehlervarianz interpretiert werden. Gemäß (8-9) ist sie bestimmt durch die Spur von \mathbf{R}_{aa}^{-1} . Gemäß dem Satz ist diese Spur am kleinsten, wenn Gleichheit gilt, wenn also \mathbf{R}_{aa}^{-1} eine Diagonalmatrix ist. Für optimale Trainingssequenzen ist also die Matrix \mathbf{R}_{aa} eine Diagonalmatrix. Ist die Varianz aller Trainingssymbole gleich und normiert auf 1, gilt $r_{\mu\mu} = K - L + 1$ für alle μ . Dann erfüllt die Varianz des Schätzfehlers in jedem Kanalschätzwert die Ungleichung

$$\sigma_h^2 \ge \frac{\sigma_N^2}{K - L + 1}.$$
(8-10)

Die Ergebnisse können leicht auf höhere Abtastraten verallgemeinert werden, wenn man sich auf Raten beschränkt, die ein ganzzahliges Vielfaches *N* der Symbolrate 1/*T* sind. Dazu wird das abgetastete Empfangssignal in seine *N* Polyphasenkomponenten zerlegt, so dass jede Komponente für die Dauer der Trainingssequenz wieder aus *K* Abtastwerten im Symboltakt besteht. Für jede Komponente wird dann die Kanalschätzung separat durchgeführt. Die einzelnen Polyphasenkomponenten unterscheiden sich nur durch den Abtastzeitpunkt $\tilde{\tau}$. Für jede Polyphasenkomponente erhält man schließlich einen eigenen Schätzvektor $\hat{\mathbf{h}}$.

8.2 Korrelationsmethode

Ein häufig verwendeter ad-hoc Ansatz zur Kanalschätzung besteht darin, die Impulsantwort durch eine einfache Korrelation des Empfangssignals mit der Trainingssequenz zu schätzen. Damit das Korrelationsergebnis ohne weitere Nachverarbeitung tatsächlich eine gute Schätzung liefert, muss die Trainingssequenz folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Die Trainingssequenz besteht aus einem Kern von K-2(L-1) Symbolen, der periodisch zu beiden Seiten hin um jeweils L-1 Symbole verlängert wird.



Abb. 8-3: Aufbau einer Trainingssequenz der Länge K für die Korrelationsmethode

2. Die zeitdiskrete periodische AKF der Kernsequenz sollte möglichst ideal sein, d.h.

$$\rho_{aa}[l] = \sum_{k=L-1}^{K-L} a^*[k]a[k+l] = \begin{cases} K-2(L-1) & \text{für } l=0\\ 0 & \text{für } 1 \le |l| \le L-1 \end{cases}$$
(8-11)

Als Schätzbasis dienen die Kreuzkorrelationswerte

$$\rho_{ax}[m] = \sum_{k=L-1}^{K-L} a^*[k] x[k+m] \qquad \text{für } m = 0, 1, \dots, L-1 \quad (8-12)$$

Um den Zusammenhang zwischen diesen Korrelationswerten und den Kanalkoeffizienten zu erhalten, setzen wir (8-2) in (8-12) ein. Damit folgt

8 Kanalschätzung

$$\rho_{ax}[m] = \sum_{k=L-1}^{K-L} a^{*}[k] \sum_{l=0}^{L-1} a[k+m-l]h[l] + n'[m]$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} h[l] \underbrace{\sum_{k=L-1}^{K-L} a^{*}[k]a[k+m-l]}_{\rho_{aa}[m-l]} + n'[m].$$
(8-13)

Für $0 \le m < L$ erhält man *L* lineare Gleichungen mit den *L* Kanalkoeffizienten. Zur weiteren Verarbeitung stellen wir dieses wieder in der kompakten Matrix-Vektor-Notation dar:

$$\boldsymbol{\rho}_{ax} = \mathbf{R}'_{aa}\mathbf{h} + \mathbf{n}'. \tag{8-14}$$

Darin ist

$$\boldsymbol{\rho}_{ax} = \left(\rho_{ax}[0], \rho_{ax}[1], ..., \rho_{ax}[L-1]\right)^{\mathrm{T}} \text{ ein Spaltenvektor mit } \rho_{ax}[m] \text{ aus (8-12),}$$
$$\mathbf{h} = \left(h[0], h[1], ..., h[L-1]\right)^{\mathrm{T}} \text{ ein Spaltenvektor mit den Kanalkoeffizienten,}$$

$$\mathbf{n'} = (n'[0], n'[1], ..., n'[L-1])^{\mathrm{T}}$$

ein Spaltenvektor mit den Abtastwerten

$$n'[m] = \sum_{k=L-1}^{K-L} a^*[k]n[k+m]$$
 des Rauschsignals,

$$\mathbf{R}_{aa}' = \begin{cases} \rho_{aa}[0] & \rho_{aa}[1] & \dots & \rho_{aa}[L-1] \\ \rho_{aa}[-1] & \rho_{aa}[0] & \dots & \rho_{aa}[L-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{aa}[1-L] & \rho_{aa}[2-L] & \dots & \rho_{aa}[0] \end{cases}$$

eine *L*×*L*-Töplitzmatrix mit den Werten $\rho_{aa}[l] = \sum_{k=L-1}^{K-L} a^*[k]a[k+l]$ der periodischen AKF der Trainingssequenz. Die Matrix hat eine gewisse Ähnlichkeit zu **R**_{aa} aus der ML-Schätzung, die Elemente sind jedoch nicht gleich. Insbesondere hat **R**_{aa} keine Töplitz-Struktur.

Schätzwerte für die Kanalkoeffizienten erhält man aus (8-14) durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{R}_{aa}^{\prime-1}$ und Weglassen des unbekannten Rauschens:

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{R}_{aa}^{\prime - 1} \boldsymbol{\rho}_{ax}.$$
(8-15)

Von der Trainingssequenz ist zunächst zu fordern, dass die Matrix \mathbf{R}'_{aa} invertierbar ist. Bei bekannter Trainingssequenz muss ihre Inverse nur einmal berechnet und abgespeichert werden. Bei jeder Kanalschätzung ist dann nur noch eine Matrix-Vektormultiplikation gemäß (8-15) durchzuführen. Eine nähere Analyse des Rauschens offenbart auch hier, dass eine Diagonalmatrix zu den geringsten Schätzfehlervarianzen führt. Darüber hinaus entfällt bei einer Diagonalmatrix die Matrix-Vektor-Multiplikation, da alle Diagonalelemente denselben Wert haben.

An dieser Stelle wird deutlich, warum die Eigenschaft der idealen AKF gemäß (8-11) der Trainingssequenz sinnvoll ist. Nur dann ist \mathbf{R}'_{aa} eine Diagonalmatrix mit dem Wert K-2(L-1)

in allen Positionen der Hauptdiagonalen. Deren Inverse ist dann ebenfalls eine Diagonalmatrix mit dem Wert 1/(K-2(L-1)) in der Hauptdiagonalen. Somit folgt

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{K - 2(L - 1)} \boldsymbol{\rho}_{ax}.$$
(8-16)

Jeder Kreuzkorrelationswert stellt somit bis auf einen konstanten Faktor bereits einen Schätzwert aus der Kanalimpulsantwort dar.

Analyse des Rauschanteils für optimale Trainingssequenzen:

Offensichtlich gilt $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} + \mathbf{R}_{aa}^{-1}\mathbf{n'} = \mathbf{h} + \frac{\mathbf{n'}}{K - 2(L-1)}$.

Für die Rauschvarianz in jedem Koeffizienten folgt

$$\mathbf{E}\left[\left|\hat{h}[l] - h[l]\right|^{2}\right] = \frac{1}{\left(K - 2(L-1)\right)^{2}} \mathbf{E}\left[\left|n'[l]\right|^{2}\right]$$
$$= \frac{1}{K - 2(L-1)} \sigma_{N}^{2}$$
(8-17)

Im Vergleich zur ML-Schätzung ist die Schätzfehlervarianz um den Faktor (K-L+1)/(K-2(L-1)) größer. Dies ist der Preis, der für eine geringere Implementierungskomplexität zu zahlen ist.

8.3 Vergleich ML-Ansatz / Korrelationsmethode bei GSM

GSM ist ein TDM/FDM-System mit 8 bzw. 16 Kanälen, die auf jeder Trägerfrequenz im Zeitmultiplex übertragen werden können. Jeder Zeitschlitz, der Nutzerdaten beinhaltet (der sog. Normal Burst), hat in der Mitte eine Trainingssequenz zur Kanalschätzung. Die Trainingssymbole sind binär. Die Trainingssequenzen in GSM sind standardisiert und wurden für die Korrelationsmethode optimiert. Sie bestehen aus einem Kern von 16 Symbolen, der um jeweils 5 Symbole vor und nach dem Kern mittels periodischer Fortsetzung verlängert wird, so dass sie insgesamt 26 Symbole lang sind. Es sind 8 verschiedene Trainingssequenzen definiert, die vom Netzbetreiber verschiedenen Funkzellen zugeordnet werden können. Die Bitmuster sind in Tabelle 8-1 zusammengestellt.

Nummer	Trainingssequenzen
0	00100 1011100001000100 10111
1	00101 1011101111000101 10111
2	01000 0111011101001000 01110
3	01000 1111011010001000 11110
4	00011 0101110010000011 01011
5	01001 1101011000001001 11010
6	10100 1111101100010100 11111
7	11101 11100010010111101 11100

Tabelle 8-1: Trainingssequenzen für den GSM Normal Burst in Binärdarstellung

Die periodische AKF des Kerns jeder der Sequenzen ist bis zu einer Verschiebung von 5 Symbolen ideal, erfüllt also die wünschenswerte Eigenschaft gemäß (8-11). Für jede der 8 Trainingssequenzen gilt also

$$r_{aa}[l] = \sum_{k=5}^{20} a[k+l]a[k] = \begin{cases} 16 & \text{für } l=0\\ 0 & \text{für } 1 \le |l| \le 5 \end{cases},$$
(8-18)

wobei a[k] = +1 der binären 0 und a[k] = -1 der binären 1 zugeordnet wird.

Zur Anwendung der beiden beschriebenen Methoden zur Kanalschätzung für GSM ist noch eine Besonderheit zu beachten, die in der Modulation begründet ist. In GSM wird die GMSK-Modulation mit differentieller Vorcodierung eingesetzt. Diese kann in guter Näherung durch eine quasi-lineare $\pi/2$ -rotierte BPSK dargestellt werden. Die Datensymbole a[k] werden also noch mit dem Rotationsfaktor j^k multipliziert, bevor sie über den linearen Kanal gesendet werden. Um zu erfassen, welche Auswirkungen das auf die Kanalschätzung hat, ersetzen wir in (8-2) a[k] durch $j^k a[k]$ und erhalten

$$x[k] = \sum_{l=0}^{L} a[k-l] j^{k-l} h[l] + n[k]$$

= $j^{k} \sum_{l=0}^{L} a[k-l] \underline{h[l]} j^{-l} + n[k].$ (8-19)

Der mit dem Rotationsfaktor j^{-l} multiplizierte Kanalkoeffizient h[l] kann nun ebenfalls als Abtastwert einer fiktiven Impulsantwort interpretiert werden. Wir wollen ihn mit h[l] bezeichnen.

Zur Schätzung der Kanalkoeffizienten sind also folgende Modifikationen vorzunehmen:

- 1. Die Abtastwerte x[k] des Empfangssignals sind zunächst mit j^{-k} zu multiplizieren, um den Faktor vor der Summe in (8-19) zu eliminieren. Somit muss in (8-5) und in (8-12) x[k] durch $j^{-k}x[k]$ ersetzt werden.
- 2. In den Beziehungen der Abschnitte 7.1 und 7.2 ist h[l] stets durch $h[l] = j^{-l}h[l]$ zu ersetzen.

Mit diesen beiden Substitutionen sind die beschriebenen Methoden anwendbar. Geschätzt wird dann natürlich nicht h[l] sondern h[l].

Für die ML-Schätzung sind die GSM-Trainingssequenzen nicht ganz aber nahezu optimal. Für $L \le 8$ gilt in guter Näherung $\sigma_h^2 \approx \frac{\sigma_N^2}{K-L}$ mit K = 26. Für L = 6 ergibt sich eine Reduktion der Rauschvarianz gegenüber den Abtastwerten nach dem Matched Filter von etwa $10\lg 20 = 13$ dB.

Für die Korrelationsmethode sind die GSM-Sequenzen optimal für $L \le 6$. Die Reduktion der Rauschvarianz kann hier mit 10lg16 = 12 dB quantifiziert werden. Der ML-Ansatz liefert also um ca. 1 dB bessere Ergebnisse als der Korrelationsansatz.

Interessant ist noch eine nähere Betrachtung des Implementierungsaufwandes.

Die Korrelationsmethode erfordert pro Kanalkoeffizient die Berechnung des Ausdrucks (8-12). Auf den ersten Blick sind pro Summenelement 2 komplexe Multiplikationen erforderlich. Da die Datensymbole a[k] aber nur die Werte +1 und –1 darstellen, entspricht die Multiplikation mit a[k] aber im ungünstigsten Fall einer einfachen Vorzeichenumkehr, d.h. die Addition wird durch die Subtraktion ersetzt. Tatsächlich werden also keine echten Multiplikationen durchgeführt. Ferner besteht die Multiplikation eines komplexen Wertes x[k] mit einer Potenz von j nur aus einer Vorzeichenumkehr bzw. dem Vertauschen von Real- und Imaginärteil. Auch diese Operation kann nicht als Multiplikation gezählt werden. Tatsächlich ist der Komplexitätsaufwand zur Berechnung der Summe aus (8-12) mit 16 komplexen Additionen bzw. Subtraktionen pro Kanalkoeffizienten anzusetzen. Die abschließend erforderliche Division durch 16 nach (8-16) ist in Festkomma-Arithmetik als einfache Schiebeoperation um 4 Bits nach rechts zu realisieren und ist damit nicht als echte Division zu zählen.

In der ML-Schätzung erscheint zunächst die Berechnung der Moore-Penrose-Inversen $(\mathbf{A}^{H}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{H}$ etwas aufwändig. Diese ist für die GSM-Trainingssequenzen aber rein reell und für jede Sequenz nur einmal durchzuführen. Das Ergebnis kann in einem ROM-Speicher abgelegt werden. Pro Kanalschätzvorgang ist dann nur noch die Matrix-Vektormultiplikation nach (8-5) durchzuführen. Für jeden Kanalkoeffizienten sind also *K*–*L*+1 Multiplikationen eines reellen Wertes mit einem komplexen Wert und *K*–*L* komplexe Additionen durchzuführen. Wegen dieser 2(*K*–*L*+1) reell-wertigen Multiplikationen ist die ML-Methode daher als aufwändiger einzustufen als die Korrelationsmethode, die keinen echten Multiplizierer benötigt. Setzt man allerdings den Aufwand zur Kanalschätzung in Relation zu dem übrigen Signalverarbeitungsaufwand in einem GSM-Empfänger, erscheint dieser Nachteil des ML-Schätzers von untergeordneter Bedeutung.

Zusammenfassung Kanalschätzung in GSM:

- ML-Schätzer etwa 1 dB geringere Rauschvarianz als Korrelationsmethode
- ML-Ansatz bis L = 8 einsetzbar. Korrelationsmethode geht nur bis L = 6.
- Aufwand pro Kanalschätzung für L = 6 Koeffizienten:

	ML-Schätzung	Korrelation
reellwertige Additionen	6.40 = 240	6.30 = 180
reellwertige Multiplikationen	6.42 = 252	0





Empfängersynchronisation 9 Synchronisation bei Mehrträgermodulation

Prof. Wolfgang Koch

idc

Universität Erlangen-Nürnberg Lehrstuhl für Digitale Übertragung

9 Synchronisation bei Mehrträgermodulation

- 9.1 Einführung in OFDM
- 9.2 Anforderungen an die Synchronisationsparameter
 - Frequenzablage
 - Abtastratenablage
 - Zeitablage des DFT-Rahmens
- 9.3 Datengestützte Kanalschätzung

Vergleich: Einträger- mit Mehrträgermodulation



OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)

idc

• OFDM ist ein Mehrträgerverfahren mit

- rechteckförmigem Modulationsimpuls der Länge T und Amplitude $1/\sqrt{T}$

- − Unterträgerabstand $\Delta f = 1/T$, d. h. $f_n = f_0 + n\Delta f$ für $n = -N_1, -N_1+1,...N_2$ ⇒ Zwei Unterträger unterscheiden sich innerhalb eines Symbolintervalls um eine ganze Anzahl von Perioden.
- ideales Sendesignal im *k*-ten Modulationsintervall:

$$s_{\text{OFDM}}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n [k] e^{j2\pi nt/T} \quad \text{für} \quad kT \le t < (k+1)T$$

Orthogonalitätseigenschaft:

$$e^{j\varphi} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-j2\pi(\nu-n)\tau/T} d\tau = 0 \quad \text{für} \quad n \neq \nu$$

- \Rightarrow Keine Kopplung zwischen den Unterkanälen!
- $\Rightarrow \Delta f = 1/T$ ist kleinster Frequenzabstand, bei dem Orthogonalität gilt
- ⇒ Gilt auch bei beliebiger Phasenverschiebung der Unterträger gegeneinander!

OFDM Modulator



OFDM Demodulator



Erzeugung des OFDM-Signals mittels IDFT



Signalabtastung mit Abtastperiode T_{tx} : $s(kT + \kappa T_{\text{Tx}}) = s[k, \kappa] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n[k] e^{j2\pi n\kappa \frac{T_{\text{Tx}}}{T}}$ für $0 \le \kappa < \frac{T}{T_{\text{Tx}}}$

Für $T/T_{tx} = N$ (mit $N \ge N_2 + N_1 + 1$) erhält man N Abtastwerte pro Symbol gemäß

$$s[k,\kappa] = \frac{1}{\sqrt{NT_{\text{Tx}}}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n[k] e^{j\frac{2\pi n\kappa}{N}} \quad \text{für} \quad 0 \le \kappa < N$$

Die Anzahl genutzter Unterträger ist gegeben durch $N_u = N_2 + N_1 + 1$.

⇒ Die Abtastwerte *s*[*k*, κ] im *k*-ten Symbolintervall ergeben sich aus der IDFT der Länge *N* der Datensymbole *a_n*[*k*]. Die Datensymbole *a_n*[*k*] der nicht genutzten Unterträger werden zu 0 gesetzt.

N ist vorzugsweise eine Potenz von 2, um den effizienten FFT-Algorithmus anwenden zu können.

Anm.: $s[k, \kappa]$ ist so normiert, dass die Energie pro Symbol unabhängig ist von der Anzahl N_u der genutzten Unterträger.







Auswirkung der zyklischen Erweiterung: Orthogonalität bleibt erhalten \Rightarrow keine ICI

Modell des OFDM-Kanals



Annahme: Das Schutzintervall sei länger als die Impulsantwort des Modulationskanals



OFDM Zusammenfassung

- Aufteilung eines hochratigen Datenstroms auf mehrere parallele niederratige Datenströme, die auf verschiedene Unterträger moduliert werden (FDM)
- Sendesignal wird durch IDFT der Datensymbole erzeugt.
- Entscheidungsvariablen im Empfänger werden mittels DFT gewonnen.
- Einfache Kanalentzerrung mittels Division durch die Kanalübertragungsfaktoren der einzelnen Unterträger
- Die Unterträger sind innerhalb eines DFT-Fensters orthogonal zueinander.
- Schutzintervall vor jedem Symbol gefüllt mit der periodischen Fortsetzung des Symbols verhindert bei Mehrwegeausbreitung
 - ISI und
 - ICI (Unterträger bleiben orthogonal)



idc

9.1 Einführung in OFDM

9.2 Anforderungen an die Synchronisationsparameter

- Frequenzablage
- Abtastratenablage
- Zeitablage des DFT-Rahmens
- 9.3 Kanalschätzung bei OFDM

Bezeichnungen

9-11 W. Koch: Empfängersynchronisation



Auswirkungen von Frequenz- und Abtastratenfehler auf die Entscheidungsvariablen

Bezeichnungen:

$a_n[k]$	das komplexe Datensymbol auf dem <i>n</i> -ten Unterträger im <i>k</i> -ten
	Symbolintervall

 T_{Rx} : Abtastintervall im Empfänger bei einfacher Abtastung (d. h. *N* Abtastwerte im DFT-Fenster)

 $H_n[k] = |H_n[k]|e^{j\varphi_n[k]}$: Kanalübertragungsfaktor auf dem *n*-ten Unterträger

Definitionen:

relativer Abtastratenfehler:

relativer Frequenzfehler:

$$\mathcal{E}_{T} = \frac{NI_{\text{Rx}} - I}{T} = \frac{NI_{\text{Rx}}}{T} - 1$$
$$\mathcal{E}_{f} = \frac{\hat{f}_{c} - f_{c}}{\Delta f} = \hat{f}_{c}T - f_{c}T$$
$$\mathcal{E}_{F} = \frac{\hat{\tau} - \tau}{T}$$

N IT

idc

NTT

relativer DFT-Zeitlagefehler:

9-13 W. Koch: Empfängersynchronisation

Interkanal Interferenz (ICI) durch Frequenzfehler $(|\varepsilon_f| < 0.5, \varepsilon_T = 0)$





Empfangssignal

- Beschränkung auf Abtastwerte eines DFT-Fensters
- Annahmen zur Vereinfachung der Betrachtungen:
 - Keine ISI im DFT-Fenster
 - kein Rauschen
 - Übertragungsfaktor für jeden Unterkanal ist konstant über T
- Empfangssignal innerhalb des DFT-Fensters des *k*-ten Symbols:

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n [k] e^{j2\pi \frac{n+\varepsilon_f}{T}t} |H_n[k]| e^{j\varphi_n[k]} \quad \text{für} \quad T_G \le t - k(T+T_G) < T + T_G$$

Abtastwerte innerhalb des DFT-Fensters (k wird ab jetzt weggelassen):

$$r[\kappa] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n |H_n| e^{j\varphi_n} e^{j2\pi \frac{n+\varepsilon_f}{T} (\kappa T_{rx} + \varepsilon_F T)} \qquad \text{für} \quad 0 \le \kappa < N$$

$$r[\kappa] = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n |H_n| e^{j\varphi'_n} e^{j2\pi \frac{\kappa}{N}(n+\varepsilon_f)(1+\varepsilon_T)} \qquad \text{mit} \quad \varphi'_n = \varphi_n + 2\pi (n+\varepsilon_f) \varepsilon_F$$

Entscheidungsvariable für Unterträger v

$$\begin{aligned} d_{\nu} &= \frac{\sqrt{T_{Rx}}}{\sqrt{N}} \sum_{\kappa=0}^{N-1} r\left[\kappa\right] \left| \hat{H}_{\nu} \right|^{-1} e^{-j\hat{q}_{\nu}} e^{-j2\pi\kappa\nu/N} r\left[\kappa\right] = \frac{1}{\sqrt{NT_{Rx}}} \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}-1} a_{n} \left| H_{n} \right| e^{j\varphi_{n}^{\prime}} e^{j2\pi\kappa(n+\varepsilon_{f})(1+\varepsilon_{f})/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\kappa=0}^{N-1} \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}} a_{n} \left| \frac{H_{n}}{\hat{H}_{\nu}} \right| e^{j(\varphi_{n}^{\prime}-\hat{\varphi}_{\nu})} e^{j2\pi\frac{\kappa}{N}(n-\nu+\varepsilon_{n})} r\left[\kappa\right] = \frac{1}{\sqrt{NT_{Rx}}} \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}-1} a_{n} \left| H_{n} \right| e^{j\varphi_{n}^{\prime}} e^{j2\pi\kappa(n+\varepsilon_{f})(1+\varepsilon_{f})/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}} a_{n} \left| \frac{H_{n}}{\hat{H}_{\nu}} \right| e^{j(\varphi_{n}^{\prime}-\hat{\varphi}_{\nu})} \sum_{\substack{\kappa=0}}^{N-1} e^{j2\pi\frac{\kappa}{N}(n-\nu+\varepsilon_{n})} r\left[\kappa\right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}} a_{n} \left| \frac{H_{n}}{\hat{H}_{\nu}} \right| e^{j(\varphi_{n}^{\prime}-\hat{\varphi}_{\nu})} e^{j\pi\frac{N-1}{N}(n-\nu+\varepsilon_{n})} \frac{e^{j\pi(n-\nu+\varepsilon_{n})} - e^{-j\pi(n-\nu+\varepsilon_{n})}}{e^{j\pi(n-\nu+\varepsilon_{n})/N} - e^{-j\pi(n-\nu+\varepsilon_{n})/N}} \\ &= \sum_{n=-N_{1}}^{N_{2}} a_{n} \left| \frac{H_{n}}{\hat{H}_{\nu}} \right| e^{j(\varphi_{n}^{\prime}-\hat{\varphi}_{\nu}+\pi\frac{N-1}{N}(n-\nu+\varepsilon_{n})} \frac{(-1)^{n-\nu}\sin(\pi\varepsilon_{n})}{N\sin(\pi(n-\nu+\varepsilon_{n})/N)} \frac{(-1)^{n-\nu}\sin(\pi\varepsilon_{n})}{H_{n,\nu}(\varepsilon_{f},\varepsilon_{T})} = \text{Unterträgerkopplungsfaktor} \end{aligned}$$

idc

idc

Frequenzablage ($\varepsilon_T = 0$)

Nutzleistung im Subkanal
$$v$$
: $P_{\rm s} = {\rm E}\left[\left|a_{\nu}\right|^{2}\right] \left(\frac{\sin\left(\pi\varepsilon_{f}\right)}{N\sin\left(\pi\varepsilon_{f}/N\right)}\right)^{2}$
ICI-Leistung im Subkanal v : $P_{\rm ICI} = \sum_{\substack{n=-N_{\rm I}\\n\neq\nu}}^{N_{\rm 2}} {\rm E}\left[\left|a_{n}\frac{H_{n}}{\hat{H}_{\nu}}\right|^{2}\right] \left(\frac{\sin\left(\pi\varepsilon_{f}\right)}{N\sin\left(\pi\left(n-\nu+\varepsilon_{f}\right)/N\right)}\right)^{2}$

Bei Annahme gleicher mittlere Empfangsleistung auf allen Unterkanälen folgt:

$$CIR_{\nu} = \frac{P_{s}}{P_{ICI}} = \frac{\sin^{2}(\pi\varepsilon_{f})}{N^{2}\sin^{2}(\pi\varepsilon_{f}/N)\sum_{\substack{n=-N\\n\neq\nu}}^{N_{2}}\frac{\sin^{2}(\pi\varepsilon_{f})}{N^{2}\sin^{2}(\pi(n-\nu+\varepsilon_{f})/N)}}$$
$$= \frac{1}{\sum_{\substack{n=-N\\n\neq\nu}}^{N_{2}}\left(\frac{\sin(\pi\varepsilon_{f}/N)}{\sin(\pi(n-\nu+\varepsilon_{f})/N)}\right)^{2}}$$
Es lässt sich zeigen, dass
$$CIR \approx \frac{3}{(\pi\varepsilon_{f})^{2}}$$
eine gute Approximation für $\varepsilon_{f} < 0.5$ ist

9-18 W. Koch: Empfängersynchronisation

Einfluss des Frequenzfehlers ($\varepsilon_T = 0$)

idc

<u>Carrier to Interference Ratio:</u>

- \Rightarrow 3dB weniger ICI an den Bandgrenzen
- ⇒ für $\varepsilon_f < 0,2$ fällt CIR mit 20 dB pro Dekade ab. Für größere Frequenzfehler geht 10lg*CIR* asymptotisch gegen -∞ dB.

9-19 W. Koch: Empfängersynchronisation



Einfluss des Frequenzfehlers bei OFDM auf die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für QAM-Konstellationen



Anforderungen an die Genauigkeit der Trägerfrequenz

- Relativer Frequenzfehler bzgl. Unterträgerabstand Δf : $\varepsilon_f < 0.01$
- Unterträgerabstand
 - bei WLAN nach IEEE802.11: Δf = 312,5 kHz
 - bei DVB-T, 2k-Mode: $\Delta f = 4,464 \text{ kHz}$
 - Bei LTE: $\Delta f = 15 \text{ kHz}$
- Absoluter Frequenzfehler: $\mathcal{E}_f \Delta f$
 - bei WLAN nach IEEE802.11: $\varepsilon_f \Delta f < 3,125 \text{ kHz}$
 - bei DVB-T, 2k-Mode: $\mathcal{E}_f \Delta f < 45 \text{ Hz}$
 - Bei LTE: $\varepsilon_f \Delta f < 150 \text{ Hz}$
- Relativer Frequenzfehler bzgl. Trägerfrequenz: $\varepsilon_f \Delta f / f_c$
 - bei WLAN nach IEEE802.11: $f_c \approx 2,4 \text{ GHz} \implies \epsilon_f \Delta f / f_c < 1,3 \text{ ppm}$
 - bei DVB-T, 2k-Mode: $f_c \approx 800 \text{ MHz} \implies \varepsilon_f \Delta f / f_c < 0.056 \text{ ppm}$
 - Bei LTE: $f_c \approx 2,6 \text{ GHz} \implies \varepsilon_f \Delta f / f_c < 0,056 \text{ ppm}$

Abtastratenfehler ($\varepsilon_f = 0$)

9-21 W. Koch: Empfängersynchronisation

Nutzleistung im Subkanal
$$v: P_{s} = E\left[\left|a_{v}\right|^{2}\right] \left(\frac{\sin\left(\pi v \varepsilon_{T}\right)}{N\sin\left(\pi v \varepsilon_{T}/N\right)}\right)^{2}$$

ICI-Leistung im Subkanal $v: P_{ICI} = \sum_{\substack{n=-N_{1}\\n\neq v}}^{N_{2}} E\left[\left|a_{n}\frac{H_{n}}{\hat{H}_{v}}\right|^{2}\right] \left(\frac{\sin\left(\pi n \varepsilon_{T}\right)}{N\sin\left(\pi\left(n-v+n \varepsilon_{T}\right)/N\right)}\right)^{2}$

Bei Annahme gleicher mittlerer Empfangsleistung auf allen Unterkanälen folgt:

$$CIR_{\nu} = \frac{P_{\rm s}}{P_{\rm ICI}} = \frac{\left(\frac{\sin(\pi\nu\epsilon_{\rm T})}{N\sin(\pi\nu\epsilon_{\rm T}/N)}\right)^2}{\sum_{\substack{n=-N_{\rm I}\\n\neq\nu}}^{N_2} \left(\frac{\sin(\pi n\epsilon_{\rm T})}{N\sin(\pi(n-\nu+n\epsilon_{\rm T})/N)}\right)^2}$$

Mit $\sin x \approx x$ und der Vernachlässigung kleiner Terme kann folgende Näherung hergeleitet werden:

$$CIR_{v} \approx \frac{1}{\varepsilon_{T}^{2} \left(v^{2} \frac{\pi^{2}}{3} + N_{u} \right)}$$

Einfluss des Abtastratenfehlers (ε_f = 0)



Einfluss des Abtastratenfehlers ($\varepsilon_f = 0$)

$$CIR_{v} \approx \frac{1}{\varepsilon_{T}^{2} \left(v^{2} \frac{\pi^{2}}{3} + N_{u} \right)}$$

idc

- CIR fällt mit zunehmenden Abtastratenfehler ab: mit 20 dB / Dekade (linear in doppelt logarithmischer Darstellung)
- CIR fällt mit wachsendem Unterträgerindex ab: mit 20 dB / Dekade (linear in doppelt logarithmischer Darstellung)
- CIR in der Mitte des Spektrums begrenzt durch Anzahl N_u der Unterträger ($\approx -10 \lg \varepsilon_T^2 N_u$ [dB] für $\nu = 0$)
- CIR an den Bandgrenzen um 3 dB höher wirkt sich aber nur auf die letzten 5 Unterträger aus.

Anforderungen an die Genauigkeit der Abtastperiode

- Abschätzung aus den Analysen eines Frequenzfehlers:
- Aus $\varepsilon_f < 0.05$ folgt CIR > 21 dB
- Aus CIR > 21 dB f
 ür den ung
 ünstigsten Untertr
 äger folgt
 - bei WLAN (v_{max} = 26): ε_T < 2 ‰
 - bei DVB-T 2k-Mode (v_{max} = 852): ε_T < 0.06 ‰
 - bei LTE (v_{max} = 660): $\varepsilon_T < 0.05 \%_0$
- Wesentlich schwächere Forderung als bei Frequenzschätzung
- I.A. wird die Abtastrate aus demselben Oszillator gewonnen wie die Trägerfrequenz ⇒ Fehler in der Abtastperiode tolerierbar, wenn Anforderung an Frequenzgenauigkeit erfüllt ist.

Fehler in der Zeitsynchronisation

9-25 W. Koch: Empfängersynchronisation



Fehler in der Zeitsynchronisation = zyklische Verschiebung im Zeitbereich

- Phasenfehler $\varphi_{err} = 2\pi n \varepsilon_F$ auf dem Unterträger *n* (unkritisch)
- Intersymbolinterferenz, wenn Impulsantwort des Kanals länger ist als $T_{\rm G} \varepsilon_{\rm F} T$.



8.2 Anforderungen an die Synchronisationsparameter

- Frequenzablage
- Abtastratenablage
- Zeitablage des DFT-Rahmens

8.3 Daten-gestützte Kanalschätzung bei OFDM

Kanalschätzung bei OFDM

9-27 W. Koch: Empfängersynchronisation



 $R_n[k] = a_n[k] \cdot H_n[k] + N_n[k]$

mit $N_n[k]$ als Gauß'sches Rauschen auf dem *n*-ten Unterträger

 In den heutigen OFDM-Systemen wird ausschließlich Pilot-basierte Kanalschätzung angewendet
 Beispiel: Pilotmuster für DVB

Pilot-basierte Kanalschätzung:

1. Schätzung der Kanalübertratragungsfaktoren $H_n[k]$ an den Stellen der Pilotsymbole:

$$\hat{H}_n[k] = \frac{R_n[k]}{a_n[k]} \left(= H_n[k] + N'_n[k] \right)$$

Beispiel: Pilotmuster für DVB-T

2. Schätzung der Kanalübertragungsfaktoren an den Stellen der Datensymbole mittels linearer Interpolation


2D-Interpolation (1)



2D-Interpolation (1)

Ansatz: lineare Interpolation, die die Fehlervarianz minimiert (MMSE):

$$\hat{H}_0 = \sum_{p=1}^P w_p \hat{H}_p$$

mit den Gewichtsfaktoren

$$W_1, W_2, \ldots, W_P$$

In Vektornotation:

$$\hat{H}_0 = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{H}}$$

mit $\mathbf{H} = [H_1, H_2, ..., H_P]^T$ und $\mathbf{w} = [w_1, w_2, ..., w_P]^T$



2D-Interpolation: MMSE-Ansatz (1)

id⁽⁾

Die optimalen Gewichtsfaktoren ergeben sich aus dem Ansatz

$$\mathbf{w}_{\text{MMSE}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \left\{ \mathbf{E} \left[\left| \boldsymbol{H}_{0} - \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \cdot \hat{\mathbf{H}} \right|^{2} \right] \right\}$$

Zur Lösung kann das Orthogonalitätsprinzip angewendet werden:

$$E\left[\left(\boldsymbol{H}_{0}-\mathbf{w}_{MMSE}^{T}\cdot\hat{\mathbf{H}}\right)\cdot\hat{\mathbf{H}}^{H}\right]=0$$

$$\underbrace{E\left[\boldsymbol{H}_{0}\cdot\hat{\mathbf{H}}^{H}\right]}_{Kovarianzvektor\,\boldsymbol{\rho}^{T}}-\mathbf{w}_{MMSE}^{T}\cdot\underbrace{E\left[\hat{\mathbf{H}}\cdot\hat{\mathbf{H}}^{H}\right]}_{Kovarianzmatrix\,\mathbf{R}}=0$$

$$\mathbf{w}_{MMSE}^{T}\cdot\mathbf{R}=\boldsymbol{\rho}^{T}$$

$$\mathbf{w}_{MMSE}^{T}=\boldsymbol{\rho}^{T}\cdot\mathbf{R}^{-1}$$

Der minimale quadratische Fehler wird üblicher Weise mit J_{min} bezeichnet. Für das *k*-te Symbol im n-ten Unterträger ist er gegeben durch

$$J_{\min}(H_n[k]) = \mathbf{E}\left[\left|H_n[k]\right|^2\right] - \mathbf{\rho}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{\rho}$$

Woher bekommen wir die Korrelationswerte? 9-31 W. Koch: Empfängersynchronisation

2D-Interpolation: MMSE-Ansatz (2)

$$R_{pq} = \mathrm{E}\left[\hat{H}_{p}\cdot\hat{H}_{q}^{*}\right]$$
 und $\rho_{p} = \mathrm{E}\left[H_{0}\cdot\hat{H}_{p}^{*}\right]$

Mit
$$\hat{H}_p = H_p + N_p$$
 folgt

$$R_{pq} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} H_{p} \cdot H_{q}^{*} \end{bmatrix} + \underbrace{\mathbf{E} \begin{bmatrix} N_{p} \cdot N_{q}^{*} \end{bmatrix}}_{=0 \text{ für } p \neq q} + \underbrace{\mathbf{E} \begin{bmatrix} H_{p} \cdot N_{q}^{*} \end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{E} \begin{bmatrix} N_{p} \cdot H_{q}^{*} \end{bmatrix}}_{=0}$$
$$R_{pq} = \begin{cases} \mathbf{E} \begin{bmatrix} H_{p} \cdot H_{q}^{*} \end{bmatrix} & \text{für } p \neq q \\ \mathbf{E} \begin{bmatrix} \left| H_{p} \right|^{2} \end{bmatrix} + \sigma_{N}^{2} & \text{für } p = q \end{cases}$$

Ebenso erhält man

$$\rho_p = \mathbf{E} \Big[H_0 \cdot H_p^* \Big]$$

 \Rightarrow **R** und ρ sind durch die Zeit-Frequenz-Korrelationsfunktion des Kanals und die Rauschvarianz bestimmt!

2 x 1D-Interpolation

9-33 W. Koch: Empfängersynchronisation



Wiederholung: Abtastung in Zeit- und Frequenzrichtung $\mathbf{\dot{d}}_{\mathbf{C}}^{(\mathbf{r})}$

	Zeitbereich	Frequenzbereich
Abtastung im Zeitbereich	$x_{c}(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\left \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{c} (\omega - n\omega_{p})}_{\left \leftarrow \omega_{p} = \frac{2\pi}{T} \right } \right \qquad $
Abtastung im Frequenzbereich	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c \left(t - kT_p\right)$ $ \langle T_p = \frac{2\pi}{\Delta \omega} \rangle $ t	$\Delta \omega \left X_{c}(\omega) \cdot \sum_{\nu = -\infty}^{\infty} \delta(\omega - \nu \Delta \omega) \right $
Abtastung im Zeit und Frequenzbereich	$ \langle T_{P} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \rangle $	$\langle a_{p} = \frac{2\pi}{T} \rangle$

9-34 W. Koch: Empfängersynchronisation

2 x 1D-Interpolation: Anforderungen an das Pilotmuster

Abtasttheorem muss in Zeit- und Frequenzrichtung erfüllt sein!

Sei D_t die Differenz der Zeitindices und D_f die Differenz der Unterträgerindices benachbarter Pilotsymbole.



Für eine überfaltungsfreie Abtastung der zeitvarianten Kanalübertragungsfunktion sind folgende Bedingungen hinreichend:



$$D_t < \frac{1}{2f_{D\max} \cdot \left(T + T_G\right)}$$

Für eine 1D-Interpolation sind die Bedingungen notwendig!

- $\Delta \tau_{max}$: maximale Verzögerungsausdehnung der Kanalimpulsantwort
- Δf : Unterträgerabstand
- *f*_{Dmax}: maximale Dopplerfrequenz
- $T+T_G$: Dauer eines OFDM-Symbols incl. Schutzintervall

9-35 W. Koch: Empfängersynchronisation





10 Anwendungsbeispiele

10.1 Anfangssynchronisation in GSM

University Erlangen-Nürnberg Institute for Digital Communications

idc

GSM Basisparameter der physikalischen Schicht

		GSM900	DCS1800	PCS1900 (USA)
Frequenz- bänder	$\begin{array}{l} MS \to BS \mbox{ (Uplink)} \\ BS \to MS \mbox{ (Downlink)} \end{array}$	890-915 MHz 935-960 MHz	1710-1785 MHz 1805-1880 MHz	1850-1910 MHz 1930-1990 MHz
FDM-Para-	Duplexabstand	45 MHz	95 MHz	80 MHz
meter	Trägerabstand	200 kHz	200kHz	200kHz
	Anzahl Frequenzkanäle	124	374	299
TDM-Para- meter	Zeitmultiplexfaktor Nutzbits pro Zeitschlitz Zeitschlitzlänge TDM-Rahmenlänge	8 für Vollratenkanäle, 16 für Halbratenkanäle 114 156,25 Bit = 15/26 ms \approx 577 μ s 60/13 ms \approx 4,615 ms		
Datenraten	Modulationsrate Bruttorate Vollratenkanal Bruttorate Halbratenkanal	13/48 Mbit/sec ≈ 270,83 kbit/sec 22,8 kbit/sec 11,4 kbit/sec		

Prinzip der Zeit- und Frequenzzuordnung



10.1 Anfangssynchronisation der Mobilstation

- Aufgaben:
 - 1. Auffinden der Frequenz mit dem Broadcast Channel (BCH)
 - 2. Frequenzsynchronisation auf 0.1 ppm Genauigkeit
 - 3. Zeitlagesynchronisation
 - 4. Rahmensynchronisation

BCH-Eigenschaften:

- Konstante Sendeleistung auf BCH-Frequenz
- Kein Frequenzspringen auf BCH-Frequenz
- Spezielle Zeitschlitze für die Anfangssynchronisation

Zeitschlitze für die Anfangssynchronisation



Abstand SB zum FCB: 7 Zeitschlitze



- Bandpass:
 - Mittenfrequenz = FCB-Frequenz
 - Bandbreite = 2* max. Frequenzabweichung des lokalen Oszillators
- gleitende Mittelung über 148 Bits



Frequenzschätzung aus FCB

10.1-9 W. Koch: Empfängersynchronisation

idc

idc



Prozedur zur Anfangssynchronisation in GSM



- 1. Messung der Empfangsleistung auf allen potenziellen BCH-Frequenzen
- 2. FCB-Detektion
- 3. Grobe Zeitschlitzsynchronisation (aus FCB-Lage)
- 4. Frequenzsynchronisation (Schätzung aus FCB)
- 5. Feine Zeitschlitzsynchronisation (aus Trainingssequenz des SB)
- 6. Rahmensynchronisation (Info aus SB-Daten)
- 7. BCCH-Daten lesen

10.1-11 W. Koch: Empfängersynchronisation





Empfängersynchronisation 10 Anwendungsbeispiele

10.2 Empfängersynchronisation bei WLAN (IEEE 802.11)

Universität Erlangen-Nürnberg Lehrstuhl für Digitale Übertragung

idc

Paketaufbau in IEEE802.11a/g



idc Aufbau eines OFDM-Datensymbols in IEEE802.11a/g



Aufbau der ersten Präambel in IEEE802.11



((†))

Zeitbereichsdarstellung der ersten Präambel in IEEE802



Die Unterträgerleistung wird um den Faktor 52/12 angehoben, damit die Gesamtleistung identisch ist mit der eines OFDM-Datensymbols.

Präambel hat günstige Dynamik: $Max\{|s(t)|\} / Min\{|s(t)|\} \approx 2,2$

Entwurf der Anfangssynchronisation für IEEE802.11a/g $\mathbf{\dot{d}}_{\mathbf{C}}^{((1))}$

Anforderungen:

- Erkennung eines Signals im Rauschen für $10 \lg E_s / N_0 > 0 dB$
- Zeitsynchronisation:

W. Koch: Empfängersynchronisation

- aus 1. Präambel: Grobe Schätzung des Endes der ersten Präambel; Genauigkeit: ca. ± 1.6 µs (32 Abtastwerte bei Einfachabtastung)
- aus 2. Präambel: Genaue Schätzung des Endes der zweiten Präambel;
 Genauigkeit: nicht hart definierbar. Je höher die Genauigkeit, desto länger dürfen die Impulsantworten des Kanals sein. Wunsch: ca. ± 0.1 µs (2 Abtastwerte)
- Frequenzsynchronisation:
 - aus 1. Präambel: Grobe Frequenzschätzung mit maximaler Toleranz von $\pm 0.25 \Delta f$.
 - aus 2. Präambel: Genaue Frequenzschätzung mit maximaler Toleranz von ±0.02 Δf.

Umrechnung von E_s/N_0 in *SNR* bei Nyquistfilterung:

 $E_{\rm s}$ = Energie pro Symbol pro Unterträger im DFT-Fenster

$$SNR = 10\lg \frac{52 \cdot E_s/T}{N_0 \cdot 64 \cdot \Delta f} = 10\lg \frac{13}{16} \frac{E_s}{N_0} = 10\lg \frac{E_s}{N_0} - 0,9dB$$

Entwurf der Anfangssynchronisation für IEEE802.11a/g

Randbedingungen:

- Die Abtastrate sollte so niedrig wie möglich sein, d. h.
 64 Werte pro OFDM-Symbol = 20 MHz (Einfachabtastung).
- Die Abtastphase τ ist unbekannt, d. h. $\tau \cdot 64/T$ ist zwischen 0 und 1 gleichverteilt.
- Die Anfangssynchronisation muss unter verschiedensten Kanalbedingungen (insbesondere für zeit-dispersive Kanäle) funktionieren.
- Der Kanal kann für die Dauer der beiden Präambeln als konstant angesehen werden.
- Ein maximaler Trägerfrequenzversatz zwischen Sender und Empfänger in der Größenordnung des Unterträgerabstandes von v = 31,25 kHz soll korrigierbar sein.

Testkanäle

W. Koch: Empfängersynchronisation

- statischer Ein-Pfad-Kanal mit additiven weißen Gauß'schen Rauschen
- statischer Zwei-Pfad-Kanal mit gleich-verteilter Phase des zweiten Pfades mit folgender Impulsantwort (willkürlich gewählt):



Detektion der ersten Präambel



idc

Alternativen:

- Kreuzkorrelation des Empfangssignals mit einer Periode des Sendesignals
- Autokorrelation des Empfangssignals mit dem um 16 Abtastwerte verzögerten Empfangssignal.

Kreuzkorrelation (1)

W. Koch: Empfängersynchronisation

 Prinzip: Korrelation des Empfangssignals mit einer Periode der ersten Präambel des Sendesignals (liefert 10 KKF-Spitzen)



Kreuzkorrelation (2)



 Rauschunterdrückung: Mittelung über den Betrag von 10 KKF-Werten, die einen Abstand von 16 haben:

$$R_{sr}[k] = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} \left| \rho_{sr}[k+i \cdot 16] \right|$$

Warum Betragsmittelung? -

Frequenzablage bewirkt zunehmende Phasendrehung. Bei kohärenter Mittelung würde der Bereich der zulässigen Frequenzablage zu sehr eingeschränkt.



Kreuzkorrelation (3): Qualität der Zeitlageschätzung



Kreuzkorrelation (4): Wahrscheinlichkeitsverteilung der geschätzten Zeitlage



Kreuzkorrelation (5): Qualität der Zeitlageschätzung



idc

Kreuzkorrelation (5): Erkennung des Nutzsignals im Rauschen

Hypothese H_1 : Nutzsignal vorhanden, $|R_{sr}[k]| > R_{thr}$ Hypothese H_0 : kein Nutzsignal vorhanden, $|R_{sr}[k]| < R_{thr}$ Bestimmung von R_{thr} an Hand von kummulativen WDFn:



Autokorrelation (1)

 Prinzip: Korrelation des Empfangssignals mit sich selbst (Nutzung der Periodizität). Es interessiert nur der AKF-Wert f
ür eine Verz
ögerung von 16 Abtastwerten:



Autokorrelation (2)



 Rauschunterdrückung: Mittelung über den Betrag von 9 AKF-Werten, die einen Abstand von 16 haben:

$$R_{rr}[k] = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^{8} \rho_{rr}[k - i \cdot 16]$$

Warum kann hier kohärent gemittelt werden? -

Die Summanden sind AKF-Werte für einen konstanten Zeitabstand (16 Abtastwerte). \Rightarrow Phase ist für alle Werte $\rho_{rr}[k]$ identisch.



Autokorrelation (3): Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zeitlageschätzwerte



Autokorrelation (4): Qualität der Zeitlageschätzung



Autokorrelation (5): Erkennung des Nutzsignals im Rauschen

idc

Hypothese H_1 : Nutzsignal vorhanden, $|R_{rr}[k]| > R_{thr}$ Hypothese H_0 : kein Nutzsignal vorhanden, $|R_{rr}[k]| < R_{thr}$ Bestimmung von R_{thr} an Hand von kummulativen WDFn:



Implementierungsaspekte (1)

- Kreuzkorrelation:
 - Berechnung von $\rho_{sr}[k]$: 16 komplexe Multiplikationen und 15 komplexe Additionen = 64 reelle Multiplikationen und 32+30 = 62 reelle Additionen
 - Betragsbildung: 2 reelle Multiplikationen und eine Addition (Die Wurzelbildung kann entfallen)
 - Gleitende Mittelwertbildung über Beträge kann rekursiv erfolgen:

$$R_{sr}[k] = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} \left| \rho_{sr}[k+i \cdot 16] \right|$$
$$= R_{sr}[k-1] - \frac{1}{10} \left| \rho_{sr}[k-16] \right| + \frac{1}{10} \left| \rho_{sr}[k+144] \right|$$

pro Rekursion: 1 Addition, 1 Subtraktion.

 $- \Rightarrow 66$ Mult. + 65 Add. pro Korrelationswert $R_{sr}[k]$

Implementierungsaspekte (2)

• Autokorrelation:

0.2-21 W. Koch: Empfängersynchronisation

– Berechnung von $\rho_{rr}[k]$ kann rekursiv erfolgen:

$$\rho_{rr}[k] = \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} r^* [k+\kappa] r[k-16+\kappa]$$
$$= \rho_{rr}[k-1] - \frac{1}{16} r^* [k] r[k-16] + \frac{1}{16} r^* [k+16] r[k]$$

Eine komplexe Multiplikation, zwei komplexe Additionen = 4 reelle Multiplikationen und 6 reelle Additionen (erfordert Speicherung der letzten 16 Produkte)

- Berechnung von *R_{rr}[k*] kann ebenfalls rekursiv erfolgen;
 2 komplexe Additionen = 4 reelle Additionen
 (erfordert Speicherung der letzten 9·16 komplexen Werte *ρ_{rr}[k*])
- $\Rightarrow 4$ Mult. + 10 Add. pro Korrelationswert $R_{rr}[k]$

Autokorrelation ist unter Implementierungsaspekten der Kreuzkorrelation klar vorzuziehen: Diese Operationen müssen bei Empfangsbereitschaft permanent durchgeführt werden.

Frequenzschätzung aus erster Präambel (1)



Kreuzkorrelationsmethode:

Eine gute Basis liefern die 10 AKF-Spitzenwerte.

Unverrauschtes Empfangssignal mit Frequenzversatz $v: r[k] = s[k]e^{j\left(2\pi\frac{k}{64}vT + \varphi_0\right)}$

Es seien k = 16i mit i = 0, 1, ..., 9 die Startzeitpunkte der 10 Perioden des Sendesignals. Dann gilt

$$\rho_{sr}[16i] = \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} s^* [\kappa] s[\kappa+16i] e^{j\left(2\pi \frac{\kappa+16i}{64}\nu T + \varphi_0\right)} \quad \text{für} \quad i = 0, 1, ..., 9$$
$$= e^{j\frac{\pi}{2}i\nu T} e^{j\varphi_0} \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} |s[\kappa]|^2 e^{j\frac{\pi}{32}\kappa\nu T}$$

Die Werte $\rho_{\rm sr}[16i]$ sind also Abtastwerte einer komplexen Exponentialschwingung \Rightarrow Zur Frequenzschätzung eignen sich alle bekannten Verfahren (Kay, Fitz, L&R...).

Nachteile: Die Schätzqualität degradiert mit zunehmender Frequenzablage.

Bei dispersiven Kanälen gibt es weitere Degradationen.

Frequenzschätzung aus erster Präambel (2)

0.2-23 W. Koch: Empfängersynchronisation

Ansatz:
$$\hat{v} = \frac{2}{\pi T} \text{phase} \left(R_{rr} [k_{\text{max}}] \right) \text{ mit } k_{\text{max}} = \arg \max_{k} \left\{ \left| R_{rr} [k] \right| \right\}$$

Unverrauschtes Empfangssignal mit Frequenzversatz $v: r[k] = s[k]e^{j\left(2\pi\frac{k}{64}vT+\varphi_0\right)}$

$$\rho_{rr} [k-16i] = \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} s [\kappa + k - 16i] e^{j\left(2\pi \frac{\kappa + k + 16i}{64} vT + \varphi_0\right)} s^* [\kappa + k - 16i - 16] e^{-j\left(2\pi \frac{\kappa + k + 16i - 16}{64} vT + \varphi_0\right)}$$
$$= \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} s [\kappa + k - 16i] s^* [\kappa + k - 16i - 16] e^{j2\pi \frac{16}{64} vT}$$
$$= e^{j\frac{\pi}{2}vT} \frac{1}{16} \sum_{\kappa=1}^{16} \left| s [\kappa + k - 16i] \right|^2 \quad \text{für} \quad k = k_{\text{max}}$$

$$R_{rr}[k_{\max}] = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^{8} \rho_{rr}[k_{\max} - i \cdot 16] = e^{j\frac{\pi}{2}vT} \frac{1}{9 \cdot 16} \sum_{i=0}^{8} \sum_{\kappa=1}^{16} \left| s[\kappa + k_{\max} - 16i] \right|^2$$

Qualität der Frequenzschätzung



Vergleich: Autokorrelation / Kreuzkorrelation

Die Autokorrelationsmethode

- hat die ungenauere Zeitlageschätzung, erfüllt aber die Anforderungen
- ist sehr robust gegen hohe Frequenzablagen (< $1.8\Delta f$)
- ist robust gegen Abtastphasenfehler
- ist robust gegen Änderungen des Kanalprofils
- · hat eine signifikant geringere Implementierungskomplexität

Feinsynchronisation mit Hilfe der 2. Präambel



- Es können die gleichen Methoden wie bei der 1. Präambel eingesetzt werden.
- Wegen erhöhter Genauigkeitsforderungen ist die Kreuzkorrelation jetzt aber f
 ür eine Verz
 ögerung von 64 – vorzuziehen.
- Die erhöhte Implementierungskomplexität ist hier tolerierbar, da diese Operationen nur für die Dauer eines OFDM-Symbols pro Datenpaket durchzuführen sind.
- Die Empfindlichkeit gegen Frequenzablagen ist kein Problem, da die Frequenzablage nach der ersten Präambel bereits weitgehend korrigiert werden kann.

Qualität der Frequenzschätzung

10.2-27 W. Koch: Empfängersynchronisation







10 Anwendungsbeispiele

10.3 Empfängersynchronisation bei DVB-T

Universität Erlangen-Nürnberg Lehrstuhl für Digitale Übertragung

idc

DVB-T-Parameter

	2k-Mode	8k-Mode
DFT-Länge	<i>T</i> = 224 μs <i>N</i> = 2048	T = 896 μs N = 8192
Schutzintervall	$T_{\rm G}$ = 7, 14, 28, 56 µs $N_{\rm G}$ = 64, 128, 256, 512	T _G = 28, 56, 112, 224 μs N _G = 256, 512, 1024, 2048
Unterträgerabstand	∆ <i>f</i> = 4,464 kHz	∆ <i>f</i> = 1,116 kHz
Anzahl belegter Unterträger	N _u = 1705	N _u = 6817
Anzahl Pilotsymbole	N _p = 176	N _p = 701

Ansatz zur Zeitsynchronisation bei DVB-T

idc

Häufig wird nur ein Bruchteil des Schutzintervalls von ISI "verbraucht".

Dann lässt sich der periodische Anteil im OFDM-Symbol zur Zeitsynchronisation nutzen.

Ansatz: Autokorrelation des nicht verbrauchten Teils des Schutzintervalls mit dem Ende des OFDM-Symbols, kurz: GI-Korrelation



Entscheidungsmetriken zur Zeitsynchronisation

Definitionen: $\rho_{rr}[l] = \sum_{l=1}^{D} r^*[l-d] \cdot r[l-d+N]$

$$P[l] = \sum_{d=1}^{D} |r[l-d]|^2$$

- Maximum Correlation (MC) Metric $\hat{l} = \arg \max_{l} \{ |\rho_{rr}[l]| \}$
- Maximum Normalized Correlation (MNC) Metric

$$\hat{l} = \arg\max_{l} \left\{ \frac{2 \left| \rho_{rr}[l] \right|}{P[l] + P[l+N]} \right\}$$

- Minimum Mean Squared Error (MMSE) Metric $\hat{l} = \arg \min_{l} \left\{ P[l] + P[l+N] - 2\operatorname{Re}\left\{ \rho_{rr}[l] \right\} \right\}$
- Maximum Likelihood (ML) Metric $\hat{l} = \arg\min_{l} \left\{ \frac{SNR}{SNR+1} \cdot \left(P[l] + P[l+N] \right) - 2\operatorname{Re}\left\{ \rho_{rr}[l] \right\} \right\}$

Eigenschaften korrelationsbasierter Entscheidungsmetriken idc

idc

- Dreieckförmiger Verlauf in der Umgebung des Maximums
- Flaches Plateau über $N_{\rm G} D$ Abtastwerte
- Verbesserung der Erkennungssicherheit durch Akkumulation über mehrere OFDM-Symbolintervalle

3-5 W. Koch: Empfängersynchronisation

Ensemble-Korrelation

Ensemble Korrelationsmetrik:

$$\hat{l} = \arg \max_{l} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{K-1} r^* [l - kN_{\rm S}] \cdot r[l - kN_{\rm S} + N]}{\sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} |r[l - kN_{\rm S}]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} |r[l - kN_{\rm S} + N]|^2}} \right\} \qquad \text{mit}_{N_{\rm S}} = N + N_{\rm G}}$$

• Beispiel: Schutzintervall-Ensemble-Korrelation:



Ensemble-Korrelation



Ensemble Korrelationsmetrik:

$$\hat{l} = \arg \max_{l} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{K-1} r^* [l - kN_{\rm S}] \cdot r[l - kN_{\rm S} + N]}{\sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} |r[l - kN_{\rm S}]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} |r[l - kN_{\rm S} + N]|^2}} \right\}$$

- Metrik ist maximal im ISI-freien Bereich des Schutzintervalls
- Metrik weist Plateau der Länge $N_{\rm G} L$ auf.
- Nur für sehr langsam veränderliche Kanäle einsetzbar: Kanal wird für die Dauer von *K* OFDM-Symbolen als konstant angesehen
- Vorteil: Robust gegenüber langen Impulsantworten
- Verbesserung durch gleitende Mittelung über $N_{\rm G} L$ Abtastwerte

Frequenz-Feinsynchronization (vor der DFT)

 Basis für Maximum-Likelihood Schätzung: Winkel der AKF an der Stelle des Maximums

$$\hat{v}_{\text{frac}} = \frac{1}{2\pi T} \arg\left\{\rho_{rr}[\hat{l}]\right\}$$

Schätzbereich:

W. Koch: Empfängersynchronisation

 $\left|\hat{\mathcal{V}}_{\text{frac}}\right| < 0.5 \Delta f$

- Eigenschaften:
 - Für AWGN-Kanäle mit einem Pfad erreicht der Schätzer die Cramer-Rao-Schranke
 - Ergebnis ist mehrdeutig, wenn der Schätzbereich verletzt ist.
 Dann ist eine nachträgliche Korrektur um ein ganzzahliges Vielfaches des Unterträgerabstands erforderlich (nach der DFT).

Frequenz-Grobsynchronisation (nach der DFT)

idc

Gesamtkorrektur: $\hat{v} = \hat{v}_{\text{frac}} + \hat{i}\Delta f$

- Basis zur Ermittlung von *i*: kontinuierliche Pilotunterträger (N_{CP} = 45 per OFDM-Symbol)
- Pilotsymbole a_n[k] auf kontinuierlichen Pilotunterträgern sind unabhängig vom OFDM-Symbolindex k



• (Zeit-) differentielle Pilotmetrik:

W. Koch: Empfängersynchronisation

$$\hat{i} = \arg\max_{i} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left| \sum_{n \in P_{\text{cont}}} R_{n+i}^* [k-1] \cdot R_{n+i}[k] \right| \right\}$$

Achtung: Die DFT-Fenster der *K*+1 OFDM-Symbole müssen exakt *N*+*N*_G Werte auseinander liegen! Zwischendurch darf keine Anpassung der Zeitsynchronisation erfolgen!

Zusammenfassung: Synchronisation für DVB-T

- Zeitsynchronisation (Lage des DFT-Fensters):
 - Basis: Schutzintervall identisch mit letztem Teil des OFDM-Symbols
 - Kriterium: Maximum der zeitl. Autokorrelation von *D* < *N*_G Abtastwerten mit um *N* verschobenen Abtastwerten (kurz: GI-Korrelation)
 - Verbesserung durch Mittelung über mehrere OFDM-Symbole (Ensemble-Korrelation)
- Frequenzsynchronisation:
 - Feinsynchronisation: Phase des maximalen Korrelationswertes aus der Zeitsynchronisation (vor der DFT)
 - Grobsynchronisation: Frequenzbereichskorrelation auf den kontinuierlichen Pilotträgern (nach der DFT)

10.3-10 W. Koch: Empfängersynchronisation



Anhang A: Intersymbolinterferenz durch Abtastzeitfehler in einem Matched-Filter-Empfänger mit Wurzel-Kosinus-Impulsen

Betrachtet wird ein linear moduliertes Signal der Form

$$s(t) = \sum_{\kappa = -\infty}^{\infty} a[\kappa] g(t - \kappa T), \qquad (A-1)$$

Darin ist

T die Symboldauer und

 $a[\kappa]$ ein Datensymbol zum Zeitpunkt κT .

Es sei g(t) ein Wurzel-Kosinus-Impuls (RRC-Impuls) dessen Energiespektrum durch

$$\left|G\left(f\right)\right|^{2} = \begin{cases} 1 & \text{für } \left|fT\right| < \frac{1-\alpha}{2} \\ \cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(\left|fT\right| - \frac{1-\alpha}{2}\right)\right) & \text{für } \frac{1-\alpha}{2} \le \left|fT\right| < \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{1+\alpha}{2} \ge \left|fT\right| \end{cases}$$
(A-2)

definiert ist. Darin ist

- α der Roll-off-Faktor, der zwischen 0 und 1 variiert werden kann, und
- fT die auf die Symbolrate normierte Frequenz.

Das Signal s(t) wird auf ein Signal-angepasstes Filter (engl.: matched filter) gegeben, dessen Ausgangssignal im Symboltakt abgetastet wird. Für die optimalen Abtastzeitpunkte ist jeder Abtastwert frei von Intersymbolinterferenz. Für nicht optimale Abtastzeitpunkte ist die Nutzleistung reduziert und es entsteht Intersymbolinterferenz (ISI), deren Leistung hier berechnet werden soll.

Der Berechnung liegen folgende Annahmen zu Grunde:

- 1. Alle Datensymbole aus dem (komplexwertigen) Symbolalphabet treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf,
- 2. Symbole zu verschiedenen Zeitindices k sind statistisch unabhängig voneinander,
- 3. Das Symbolalphabet ist auf die Leistung 1 normiert, d.h. es gilt $E[|a[\kappa]|^2] = 1$, wobei sich die Leistung zu gleichen Teilen auf Real- und Imaginärteil aufteilt.

Das Ausgangssignal des Signal-angepassten Filters ist gegeben durch

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(\vartheta + t) g(\vartheta) d\vartheta$$

= $\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a[\kappa] g(\vartheta + t - \kappa T) g(\vartheta) d\vartheta$
= $\frac{1}{T} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a[\kappa] \rho(t - \kappa T)$ (A-3)

20.10.2016

mit

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta + \tau) g(\vartheta) d\vartheta.$$
 (A-4)

als Autokorrelationsfunktion des Modulationsimpulses. Für $\sqrt{\cos}$ -Impulse kann die AKF in der Form

$$\rho(\tau) = \frac{\cos\left(\pi\alpha\frac{\tau}{T}\right)}{1 - \left(2\alpha\frac{\tau}{T}\right)^2} \cdot \frac{\sin\left(\pi\frac{\tau}{T}\right)}{\pi\frac{\tau}{T}}$$
(A-5)

ausgedrückt werden (inverse Fourier-Transformierte von (A-2)). Zu den optimalen Abtastzeitpunkten t = kT liefert in (A-3) nur der Summenterm für $\kappa = k$ einen von Null verschiedenen Wert. x[k] ist also nur vom Symbol a[k] abhängig.

Es sei

$$\mathcal{E}_{\tau} = \frac{\tau - \hat{\tau}}{T} \tag{A-6}$$

der auf das Symbolintervall normierte Abtastzeitfehler.

Die mittlere Nutzleistung ist gegeben durch

$$P_{\rm S} = {\rm E}\left[\left|a\left[k\right]\rho\left(\varepsilon_{\tau}T\right)\right|^{2}\right] = \left|\rho\left(\varepsilon_{\tau}T\right)\right|^{2} = \left(\frac{\cos\left(\pi\alpha\varepsilon_{\tau}\right)}{1 - \left(2\alpha\varepsilon_{\tau}\right)^{2}} \cdot \frac{\sin\left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)}{\pi\varepsilon_{\tau}}\right)^{2}\right].$$
 (A-7)

Die mittlere Leistung der Intersymbolinterferenz errechnet sich am zweckmäßigsten über

$$P_{\rm ISI} = P_{\rm tot} - P_{\rm S} \,. \tag{A-8}$$

Darin ist P_{tot} die mittlere Gesamtleistung zu einem beliebigen Abtastzeitpunkt. Sie ist gegeben durch

$$P_{\text{tot}} = \mathbf{E}\left[\left|\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a[\kappa]\rho(\varepsilon_{\tau}T - \kappa T)\right|^{2}\right]$$
$$= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbf{E}\left[a[\kappa]a^{*}[k]\right]}_{=1 \text{ für } k=\kappa \text{ und }=0 \text{ für } k\neq\kappa}\rho(\varepsilon_{\tau}T - \kappa T)\rho^{*}(\varepsilon_{\tau}T - kT)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\rho(\varepsilon_{\tau}T - kT)\right|^{2} \qquad (A-9)$$

Diese Summe gilt es nun zu bestimmen. Gemäß dem Parseval'schen Theorem gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \rho[k] \right|^2 = T \int_{-0.5/T}^{+0.5/T} \left| R(f) \right|^2 df$$
 (A-10)

Darin ist R(f) die zeit-diskrete Fourier-Transformierte von $\rho[k] = \rho(\varepsilon_{\tau}T - kT)$.

Die Fourier-Transformierte der zeitkontinuierlichen AKF $\rho(\tau)$ ist durch (A-2) gegeben. Die zeit-diskrete Fourier-Transformierte zu den optimalen Abtastzeitpunkten ist die Überlagerung aller um ganzzahlige Vielfache von 1/T verschobener Funktionen, was bei Nyquist-Impulsen immer eine Konstante ergibt. Für nicht optimal abgetastete Signale muss $|G(f)|^2$ vor der Verschiebung noch mit $e^{2\pi e_T fT}$ multipliziert werden. Wegen der Symmetrie von G(f) genügt es, nur den Bereich für positive Frequenzen zu betrachten. Ferner überlagern sich nur im Intervall $(1-\alpha)/2 < fT \le 0.5$ genau zwei gegeneinander verschobene Spektren, so dass gilt:

$$R(f) = \left| \left| G(f) \right|^2 e^{2\pi\varepsilon_r fT} + \left| G\left(f - \frac{1}{T} \right) \right|^2 e^{2\pi\varepsilon_r (fT-1)} \right|^2 \quad \text{für } 0 \le fT \le 0,5$$
(A-11)

Aus (A-9) folgt mit (A-10) und (A-11):

$$P_{\text{tot}} = \underbrace{2T \int_{0}^{\frac{1-\alpha}{2T}} \left| G(f) \right|^{4} df}_{1-\alpha} + 2T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \left| G(f) \right|^{2} e^{j2\pi\varepsilon_{r}fT} + \left| G\left(f - \frac{1}{T}\right) \right|^{2} e^{j2\pi(fT-1)\varepsilon_{r}} \right|^{2} df$$
$$= 1 - \alpha + 2T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \left| \left| G(f) \right|^{2} + \left| G\left(f - \frac{1}{T}\right) \right|^{2} e^{-j2\pi\varepsilon_{r}} \right|^{2} df$$
(A-12)

(A-2) eingesetzt ergibt

$$\begin{split} P_{\text{tot}} &= 1 - \alpha + 2T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} e^{-j2\pi\epsilon_{\tau}} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) e^{-j2\pi\epsilon_{\tau}} \right|^{2} df \\ &= 1 - \alpha + 2T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \left| \frac{e^{j\pi\epsilon_{\tau}} + e^{-j\pi\epsilon_{\tau}}}{2} + \frac{e^{j\pi\epsilon_{\tau}} - e^{-j\pi\epsilon_{\tau}}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) \right|^{2} df \\ &= 1 - \alpha + 2T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \left| \cos \pi\epsilon_{\tau} + j \sin \pi\epsilon_{\tau} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) \right|^{2} df \\ &= 1 - \alpha + 2\cos^{2}\left(\pi\epsilon_{\tau}\right) T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} df + 2\sin^{2}\left(\pi\epsilon_{\tau}\right) T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \cos^{2}\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) df \\ &= 1 - \alpha + \alpha \cos^{2}\pi\epsilon_{\tau} + \sin^{2}\pi\epsilon_{\tau} \left(T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} df + T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) df \\ &= 1 - \alpha + \alpha \cos^{2}\pi\epsilon_{\tau} + \sin^{2}\pi\epsilon_{\tau} \left(T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} df + T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) df \\ &= 1 - \alpha + \alpha \cos^{2}\pi\epsilon_{\tau} + \sin^{2}\pi\epsilon_{\tau} \left(T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} df + T \int_{\frac{1-\alpha}{2T}}^{0.5/T} \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2} \right) \right) df \\ &= 1 - \alpha + \alpha \cos^{2}\pi\epsilon_{\tau} + \frac{\alpha}{2}\sin^{2}\pi\epsilon_{\tau} \right) \end{split}$$

Ersetzt man noch $\cos^2(.)$ durch $1 - \sin^2(.)$ folgt schließlich

$$P_{\rm tot} = 1 - \frac{\alpha}{2} \sin^2 \pi \varepsilon_{\tau}.$$
 (A-13)

Asymptotisches Verhalten:

Für kleine Fehler ($\varepsilon_{\tau} \ll 1$), kann der Zusammenhang zwischen P_{ISI} und ε_{τ} gut approximiert werden, indem man nur die ersten zwei Terme der Potenzreihenentwicklung der elementaren

Funktionen betrachtet. Für kleine Werte x gilt: $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, $\frac{1}{1 - x^2} \approx 1 + x^2$ und

 $\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}$. Setzt man diese Approximationen in (A-13) und (A-7) ein, folgt

$$P_{\rm ISI}\left(\varepsilon_{\tau},\alpha\right) \approx 1 - \frac{\alpha}{2} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2} - \left(\left(1 - \frac{\alpha^{2}}{2} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}\right) \left(1 + \frac{4\alpha^{2}}{\pi^{2}} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}\right) \left(1 - \frac{1}{6} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}\right)\right)^{2}$$
$$\approx 1 - \frac{\alpha}{2} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2} - \left(1 + \left(\frac{4\alpha^{2}}{\pi^{2}} - \frac{\alpha^{2}}{2} - \frac{1}{6}\right) \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}\right)^{2}$$
$$\approx 1 - \frac{\alpha}{2} \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2} - 1 - \left(\frac{8\alpha^{2}}{\pi^{2}} - \alpha^{2} - \frac{1}{3}\right) \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}$$

Nach weiterer Zusammenfassung folgt schließlich

$$P_{\rm ISI}\left(\varepsilon_{\tau},\alpha\right) \approx \left(\alpha^{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(\pi\varepsilon_{\tau}\right)^{2}.$$
 (A-14)

Die ISI-Leistung ist also proportional zu ε_{z} , wobei der Proportionalitätsfaktor ein Polynom 2. Grades in α darstellt. In der doppelt logarithmischen Darstellung sind die Asymptoten Geraden mit einer Steigung von 20 dB pro Dekade. Grenzfälle:

$$\alpha = 0: \qquad P_{\rm ISI}\left(\varepsilon_{\tau}, 0\right) = 1 - \left(\frac{\sin \pi \varepsilon_{\tau}}{\pi \varepsilon_{\tau}}\right)^2 \approx \frac{\pi^2}{3} \varepsilon_{\tau}^2 \approx 3,290 \varepsilon_{\tau}^2 \qquad (A-15)$$

$$\alpha = 1: \qquad P_{\text{ISI}}\left(\varepsilon_{\tau}, 1\right) = 1 - \frac{1}{2}\sin^{2}\left(\pi\varepsilon_{\tau}\right) - \left(\frac{\sin\left(2\pi\varepsilon_{\tau}\right)}{\left(1 - 4\varepsilon_{\tau}^{2}\right)2\pi\varepsilon_{\tau}}\right)^{2} \approx \left(\frac{5}{6}\pi^{2} - 8\right)\varepsilon_{\tau}^{2} \approx 0,2247\varepsilon_{\tau}^{2} \qquad (A-16)$$

Der Zusammenhang zwischen der Nutz- bzw. der ISI-Leistung und dem Abtastzeitfehler ist in Abb. A-1 für verschiedene α dargestellt. Die asymptotischen Geraden der ISI-Leistung haben demzufolge eine *Steigung* von 20 dB pro Dekade in der doppelt logarithmischen Darstellung.

Abb. A-2 zeigt die per Simulation ermittelten Bitfehlerkurven für verschiedene Abtastzeitfehler ε_{τ} . Typisch ist das Ausflachen der Kurven für große E_b/N_0 bei zu großem ε_{τ} . Nimmt man an, dass die ISI-Werte näherungsweise komplex Gauss-verteilt sind, kann man die asymptotische Bitfehlerwahrscheinlichkeit bereits aus der statischen Bitfehlerkurve des Modulations- E_{τ} . P_{τ}

verfahrens abschätzen, indem man mit Hilfe der Beziehung
$$10 \lg \frac{E_b}{N_0} = 10 \lg \frac{P_s}{P_{ISI}} - 10 \lg (\lg M)$$

ein äquivalentes E_b/N_0 in dB ermittelt. (ld*M* ist die Anzahl der Bits pro Symbol.)



Abb. A-1: Nutz- und ISI-Leistung nach dem Signal-angepassten Filter auf Grund eines statischen Abtastzeitfehlers \mathcal{E}_{τ}



Abb. A-2: Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom E_b/N_0 bei QAM mit $\alpha = 0,25$ für verschiedene statische Abtastzeitfehler; Annahmen: Kein Frequenzversatz und perfekte Phasenkenntnis im Symboldetektor

Betrachtet wird ein linear moduliertes Signal mit einem Frequenzversatz. Es ist gegeben durch

$$s(t) = e^{j2\pi vt} \sum_{\kappa = -\infty}^{\infty} a[\kappa] g(t - \kappa T).$$
(B-1)

Darin ist

T die Symboldauer,

 $a[\kappa]$ ein Datensymbol zum Zeitpunkt κT und

v der Frequenzversatz zwischen Sender- und Empfängeroszillator.

Es sei g(t) ein Wurzel-Kosinus-Impuls (RRC-Impuls) dessen Energiespektrum durch

$$\left|G(f)\right|^{2} = \begin{cases} 1 & \text{für } |fT| < \frac{1-\alpha}{2} \\ \cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(|fT| - \frac{1-\alpha}{2}\right)\right) & \text{für } \frac{1-\alpha}{2} \le |fT| < \frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{1+\alpha}{2} \ge |fT| \end{cases}$$
(B-2)

definiert ist. Darin ist

- α der Roll-off-Faktor, der zwischen 0 und 1 variiert werden kann, und
- fT die auf die Symbolrate normierte Frequenz.

Das Signal s(t) wird auf ein Signal-angepasstes Filter (engl.: matched filter) gegeben, dessen Ausgangssignal im Symboltakt abgetastet wird. Für die optimalen Abtastzeitpunkte und v=0ist jeder Abtastwert frei von Intersymbolinterferenz. Für einen Frequenzversatz $v \neq 0$ ist die Nutzleistung reduziert und es entsteht Intersymbolinterferenz (ISI). Für beides wird die Leistung nun berechnet.

Der Berechnung liegen folgende Annahmen zu Grunde:

- 1. Alle Datensymbole aus dem (komplexwertigen) Symbolalphabet treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf,
- 2. Symbole zu verschiedenen Zeitindices κ sind statistisch unabhängig voneinander,
- 3. Das Symbolalphabet ist auf die Leistung 1 normiert, d.h. es gilt $E[|a[\kappa]|^2] = 1$, wobei sich die Leistung zu gleichen Teilen auf Real- und Imaginärteil aufteilt.
Das Ausgangssignal des Signal-angepassten Filters ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(\vartheta + t) g(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi v\vartheta} \sum_{\kappa = -\infty}^{\infty} a[\kappa] g(\vartheta + t - \kappa T) g(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{\kappa = -\infty}^{\infty} a[\kappa] \rho(t - \kappa T) \end{aligned}$$
(B-3)

mit

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi v\vartheta} g(\vartheta + \tau) g(\vartheta) d\vartheta.$$
 (B-4)

als Korrelationsfunktion zwischen dem Modulationsimpuls und seiner Frequenzverschiebung. Für die Fourier-Transformierte von $\rho(\tau)$ gilt

$$R(f) = \int_{\tau = -\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = G(f + \nu) \cdot G(f)$$
(B-5)

Es wird der Abtastwert zum Zeitpunkt t = 0 betrachtet.

Nutzleistung:
$$P_{\rm s} = E\left[\left|a\left[0\right]\rho\left(0\right)\right|^2\right] = \left|\rho\left(0\right)\right|^2 \tag{B-6}$$

Die Gesamtleistung ist gegeben durch

$$P_{\text{tot}} = E\left[\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k]\rho[k]\right|^{2}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \underbrace{E\left[a[k]a^{*}[\kappa]\right]}_{1 \text{ für } k=\kappa \text{ und } 0 \text{ für } k\neq\kappa} \rho[k]\rho^{*}[\kappa].$$

Unter Verwendung der drei Annahmen folgt für die

Gesamtleistung:

$$P_{\text{tot}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \rho[k] \right|^2.$$
 (B-7)

Daraus erhält man die

ISI-Leistung: $P_{\rm ISI} = P_{\rm tot} - P_{\rm S}$. (B-8)

Berechnung der Gesamtleistung

Am zweckmäßigsten erfolgt die Berechnung der Gesamtleistung im Frequenzbereich. Nach dem Parseval'schen Theorem gilt

$$P_{\text{tot}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \rho[k] \right|^2 = T \int_{-0.5/T}^{+0.5/T} \left| R_Z \left(e^{j2\pi fT} \right) \right|^2 df , \qquad (B-9)$$

mit $R_Z(z)$ als Z-Transformierte von $\rho[k]$. Diese kann als Überlagerung Frequenz-verschobener Spektren R(f) dargestellt werden. Unter Berücksichtigung, dass G(f) gemäß (B-2) bandbegrenzt ist, gilt

SyncB_FreqErr.doc

,

$$R_{\rm Z}\left(e^{j2\pi fT}\right) = G\left(f\right)G\left(f-\nu\right) + G\left(f-1\right)G\left(f-\nu-1\right) \, \text{für} \quad 0 \le fT < 0.5. \tag{B-10}$$

bzw.

$$R_{\rm Z}\left(e^{j2\pi fT}\right) = G\left(f\right)G\left(f-\nu\right) + G\left(f+1\right)G\left(f-\nu+1\right) \,\,\text{für}\,\,-0.5 \le fT < 0. \tag{B-11}$$

Auf Grund der Symmetrie von G(f) ist auch R(f) aus (B-5) symmetrisch und zwar bzgl. f = v/2. Um diese Symmetrieeigenschaft nutzen zu können, ist es zweckmäßig, $R_{z}(e^{i2\pi fT})$ zyklisch um -v/2 zu verschieben, so dass der Symmetriepunkt dann bei f = 0 liegt. Dann nämlich genügt es, die Integration nur über positive Frequenzen durchzuführen. Dann gilt

$$R_{\rm Z}\left(e^{j2\pi\left(f+\frac{\nu}{2}\right)T}\right) = G\left(|f|+\frac{\nu}{2}\right)G\left(|f|-\frac{\nu}{2}\right) + G\left(|f|+\frac{\nu}{2}-1\right)G\left(|f|-\frac{\nu}{2}-1\right).$$
(B-12)

Mit

$$P_{\text{tot}} = 2T \int_{0}^{0.5/T} \left| R_Z \left(e^{j2\pi \left(f + \frac{\nu}{2} \right)T} \right) \right|^2 df$$
(B-13)

und der Tatsache, dass G(f) reellwertig ist, folgt

$$P_{\text{tot}} = 2T \int_{0}^{0.5/T} G^2 \left(f + \frac{\nu}{2} \right) G^2 \left(f - \frac{\nu}{2} \right) df + 2T \int_{0}^{0.5/T} G^2 \left(f + \frac{\nu}{2} - 1 \right) G^2 \left(f - \frac{\nu}{2} - 1 \right) df + 4T \int_{0}^{0.5/T} G \left(f + \frac{\nu}{2} \right) G \left(f + \frac{\nu}{2} - 1 \right) G \left(f - \frac{\nu}{2} \right) G \left(f - \frac{\nu}{2} - 1 \right) df$$
(B-14)

Die ersten beiden Integrale lassen sich unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Integralkerne zu einem Integral zusammenfassen, so dass gilt

$$P_{\text{tot}} = 2T \int_{0}^{1/T} G^{2} \left(f + \frac{\nu}{2} \right) G^{2} \left(f - \frac{\nu}{2} \right) df + 4T \int_{0}^{0.5/T} G \left(f + \frac{\nu}{2} \right) G \left(f + \frac{\nu}{2} - 1 \right) G \left(f - \frac{\nu}{2} \right) G \left(f - \frac{\nu}{2} - 1 \right) df .$$
(B-15)

Die zwei Anteile bezeichnen wir mit P_1 , und P_2 , so dass $P_{tot} = P_1 + P_2$ gilt. Da G(f) abschnittweise definiert ist, muss der Integrationsbereich jeweils in mehrere Teilbereiche unterteilt werden. Je nach v und α treten verschiedene Fälle auf, die im Folgenden separat behandelt werden.

Zunächst wird $\alpha \le 0,5$ betrachtet:

- 1. $vT \leq \alpha$.
 - a) Das Integrationsintervall des ersten Integrals aus (B-15) muss in 3 Abschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1:
$$0...\frac{1-\alpha-\nu T}{2T}$$
. Hier gilt $G(f+\nu/2) = G(f-\nu/2) = 1$.
Es folgt $P_{11} = 1 - \alpha - \nu T$.

Abschnitt 2: $\frac{1-\alpha-\nu T}{2T}$... $\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}$. Hier liegt der erste Teil der abfallenden Flanke von $G(f+\nu/2)$ in einem Bereich, in dem $G(f-\nu/2) = 1$ ist.

$$P_{12} = 2T \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}} \cos^2\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(f - \frac{1-\alpha-\nu}{2}\right)\right) df$$
$$= \nu T + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \Big|_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}$$
$$= \nu T + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right)$$

Abschnitt 3: $\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}$... $\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}$. Hier überlappt sich der letzte Teil der abfallenden Flanke von $G(f+\nu/2)$ mit dem ersten Teil der abfallenden Flanke von $G(f-\nu/2)$.

$$\begin{split} P_{13} &= 2T \int_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2} \right) \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha+vT}{2} \right) \right) df \\ &= \frac{\alpha-vT}{2} + \frac{T}{2} \int_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2} \right) \right) df + \frac{T}{2} \int_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos \frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha+vT}{2} \right) df \\ &+ \frac{T}{4} \int_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} vT \right) df + \frac{T}{4} \int_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(2fT - 1 + \alpha \right) \right) df \\ &= \frac{\alpha-vT}{2} + \frac{\alpha}{2\pi} \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2} \right) \right) \Big|_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} + \frac{\alpha}{2\pi} \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha+vT}{2} \right) \right) \Big|_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \\ &+ \frac{\alpha-vT}{4} \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} vT \right) + \frac{\alpha}{8\pi} \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} \left(2fT - 1 + \alpha \right) \right) \Big|_{\frac{1-\alpha+vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \\ &= \frac{\alpha-vT}{4} \left(2 + \cos \left(\frac{\pi}{\alpha} vT \right) \right) - \frac{\alpha}{4\pi} \sin \left(\frac{\pi}{\alpha} vT \right) \end{split}$$

Schließlich folgt

$$P_{1} = P_{11} + P_{12} + P_{13}$$

$$= 1 - \alpha - \nu T + \nu T + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right) + \frac{\alpha - \nu T}{4} \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right)\right) - \frac{\alpha}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right)$$

$$= 1 - \alpha + \frac{\alpha - \nu T}{4} \left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right)\right) + \frac{3\alpha}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\nu T\right)$$
(B-16)

b) Für das zweite Integral von P_{tot} aus (B-15) erstreckt sich der gemeinsame von Null verschiedene Anteil aller vier Faktoren über das Intervall $\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}...\frac{1}{2T}$.

$$\begin{split} P_{2} &= 4T \underbrace{\int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{0.5/T} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha+\nu T}{2}\right)\right) \dots}_{\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1+\alpha+\nu T}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1+\alpha-\nu T}{2}\right)\right) df \\ P_{2} &= T \underbrace{\int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{0.5/T} \left(\cos\left(\frac{\pi\nu T}{2\alpha}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(2fT-1)\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi\nu T}{2\alpha}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(2fT-1)\right)\right) df \\ &= T \cos^{2} \left(\frac{\pi\nu T}{2\alpha}\right) \underbrace{\int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{0.5/T} df - T \underbrace{\int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{0.5/T} \sin^{2} \left(\frac{\pi}{2\alpha}(2fT-1)\right) df \\ &= \frac{\alpha-\nu T}{2} \underbrace{\cos^{2} \left(\frac{\pi\nu T}{2\alpha}\right) - \frac{\alpha-\nu T}{4} + \frac{\alpha}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(2fT-1)\right) \underbrace{\int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{0.5/T} \sin^{2} \left(\frac{\pi\nu T}{\alpha}\right)}_{\sin(0)-\sin\left(\frac{\pi\nu T}{\alpha}\right)} \\ &= \frac{\alpha-\nu T}{4} \cos\left(\frac{\pi\nu T}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi\nu T}{\alpha}\right) \end{split}$$

Nun lässt sich die Gesamtleistung für $VT \le \alpha$ geschlossen berechnen:

$$P_{\text{tot1}} = P_1 + P_2$$

= $1 - \alpha + \frac{\alpha - vT}{4} \left(2 + \cos\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) \right) + \frac{3\alpha}{4\pi} \sin\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) + \frac{\alpha - vT}{4} \cos\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{4\pi} \sin\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right)$
$$P_{\text{tot1}} = 1 - \frac{\alpha + vT}{2} + \frac{\alpha - vT}{2} \cos\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) \quad \text{für } 0 \le vT \le \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \le 0, 5. (B-17)$$

2. $\alpha < \nu T \le 1-\alpha$: Die abfallende Flanke von $G(f+\nu/2)$ liegt vollständig im Bereich, in dem $G(f-\nu/2) = 1$ ist.

Das Integrationsintervall des ersten Integrals aus (B-15) muss in 2 Abschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1:
$$0...\frac{1-\alpha-vT}{2T}$$
. Hier gilt $G(f+v/2) = G(f-v/2) = 1$.
Es folgt $P_{11} = 1-\alpha-vT$.

SyncB_FreqErr.doc

Abschnitt 2:
$$\frac{1-\alpha-vT}{2T}...\frac{1+\alpha-vT}{2T}.$$
$$P_{12} = 2T\int_{\frac{1-\alpha-vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}}\cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT-\frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)df$$
$$= \alpha + \frac{\alpha}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT-\frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)\Big|_{\frac{1-\alpha-vT}{2T}}^{\frac{1-\alpha-vT}{2T}}$$

 $= \alpha$

Das zweite Integral aus (B-15) ist Null. Es folgt:

$$P_{\text{tot}2} = P_{11} + P_{12} = 1 - \nu T \quad \text{für} \quad \alpha \le \nu T \le 1 - \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \le 0, 5.$$
 (B-18)

3.
$$1 - \alpha \leq vT \leq 1$$
:

Das Integrationsintervall des ersten Integrals aus (B-15) muss in 2 Teilabschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1 $0...\frac{vT + \alpha - 1}{2T}$: Der erste Teil der abfallende Flanke von G(f + v/2)überlagert sich mit dem letzten Teil der ansteigenden Flanke von G(f - v/2).

$$\begin{split} P_{11} &= 2T \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} \underbrace{\cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)}_{=\frac{1}{2}(1+\cos(2...))} \cdot \underbrace{\cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT + \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)}_{=\frac{1}{2}(1+\cos(2...))} df \\ &= \frac{vT+\alpha-1}{4} + \frac{T}{2} \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right) df + \frac{T}{2} \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT + \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right) df \\ &+ \frac{T}{4} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-\alpha-vT)\right) \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} df + \frac{T}{4} \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}2fT\right) df \\ &= \frac{vT+\alpha-1}{4} + \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-vT)\right)} \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} + \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT + \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right)}_{=\sin(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(1-vT)\right)} \\ &- \frac{vT+\alpha-1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-vT)\right) + \frac{\alpha}{8\pi} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}2fT\right)}_{=\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-vT)\right)-\sin(0)} \int_{0}^{\frac{vT+\alpha-1}{2T}} \frac{vT+\alpha-1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-vT)\right) + \frac{5\alpha}{8\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-vT)\right) \end{split}$$

Abschnitt 2 $\frac{\alpha - 1 + vT}{2T} \dots \frac{\alpha + 1 - vT}{2T}$: Der letzte Teil der abfallende Flanke von G(f + v/2) überlagert sich mit G(f - v/2) = 1.

$$P_{12} = 2T \int_{\frac{\alpha-1+\nu T}{2T}}^{\frac{\alpha+1-\nu T}{2T}} \cos^{2}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) df$$
$$= 1 - \nu T + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \Big|_{\frac{\alpha-1+\nu T}{2T}}^{\frac{\alpha+1-\nu T}{2T}}$$
$$= 1 - \nu T - \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(1-\nu T)\right)$$

Das zweite Integral aus (B-15) ist Null. Es folgt:

$$P_{\text{tot 3}} = P_{11} + P_{12} = \frac{\alpha + 3 - 3\nu T}{4} - \frac{\nu + \alpha - 1}{8} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}(1 - \nu T)\right) - \frac{3\alpha}{8\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}(1 - \nu T)\right). \quad (B-19)$$

für $\alpha \le \nu T \le 1 - \alpha$ und $\alpha \le 0,5$

Berechnung der Nutzleistung

Auch hier erfolgt die Berechnung am zweckmäßigsten im Frequenzbereich. Da $\rho(\tau)$ sich als inverse Fourier-Transformierte von R(f) darstellen lässt, folgt mit der Beziehung (B-5) und der oben erwähnten Frequenzverschiebung um $\pm v/2$ für t = 0

$$P_{\rm S} = \left| \rho\left[0\right] \right|^2 = \left(2T \int_{0}^{\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}} G\left(f - \frac{\nu}{2}\right) \cdot G\left(f + \frac{\nu}{2}\right) df \right)^2. \tag{B-20}$$

Dabei wurde das Integrationsintervall auf den von Null verschiedenen Teil des Integralkerns beschränkt. Auch hier muss der Integrationsbereich jeweils in mehrere Teilbereiche unterteilt werden. Die Aufteilung ist identisch mit der für das erste Integral aus (B-15).

Zunächst wird $\alpha \le 0.5$ betrachtet:

1. $vT \leq \alpha$:

Das Intervall des Integrals aus (B-20) muss in 3 Abschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1:
$$0...\frac{1-\alpha-vT}{2T}$$
. Hier gilt $G(f+v/2) = G(f-v/2) = 1$.
Es folgt $I_{11} = 1-\alpha-vT$.
Abschnitt 2: $\frac{1-\alpha-vT}{2T}...\frac{1-\alpha+vT}{2T}$. Hier liegt der erste Teil der abfallenden
Flanke von $G(f+v/2)$ im Bereich, in dem $G(f-v/2) = 1$ ist.

$$I_{12} = 2T \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) df$$
$$= \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right)$$
$$= \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right)$$

Abschnitt 3: $\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}$... $\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}$. Hier überlappt sich der letzte Teil der abfallenden Flanke von G(f+v/2) mit dem ersten Teil der abfallenden Flanke von G(f - v/2).

$$\begin{split} I_{13} &= 2T \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha+\nu T}{2}\right)\right) df \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right) T \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}} df + T \int_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(2fT - 1 + \alpha)\right) df \\ &= (\alpha - \nu T) \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right) + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha}{2}\right)\right) \Big|_{\frac{1-\alpha+\nu T}{2T}}^{\frac{1+\alpha-\nu T}{2T}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\nu T\right) = 0 \end{split}$$

Schließlich folgt

$$P_{\text{S1}} = (I_{11} + I_{12} + I_{13})^{2}$$

$$= \left(1 - \alpha - vT + \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}vT\right) + (\alpha - vT)\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}vT\right) - \frac{2\alpha}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}vT\right)\right)^{2}$$

$$= \left(1 - \alpha - vT + (\alpha - vT)\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}vT\right) + \frac{4\alpha}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}vT\right)\right)^{2}$$
(B-21)

2. $\alpha < \nu T \le 1 - \alpha$: Die abfallende Flanke von $G(f + \nu/2)$ liegt vollständig im Bereich, in dem G(f - v/2) = 1 ist.

Das erste Integral aus (B-15) muss in 2 Abschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1:
$$0...\frac{1-\alpha-vT}{2T}$$
. Hier gilt $G(f+v/2) = G(f-v/2) = 1$.
Es folgt $I_{21} = 1-\alpha-vT$.

SyncB_FreqErr.doc

Abschnitt 2:
$$\frac{1-\alpha-vT}{2T}...\frac{1+\alpha-vT}{2T}.$$
$$I_{22} = 2T \int_{\frac{1-\alpha-vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right) df$$
$$= \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1-\alpha-vT}{2}\right)\right) \int_{\frac{1-\alpha-vT}{2T}}^{\frac{1+\alpha-vT}{2T}}$$
$$= \frac{4\alpha}{\pi}$$

Das zweite Integral aus (B-15) ist Null. Es folgt:

$$P_{S2} = (I_{21} + I_{22})^2 = \left(1 - vT + \alpha \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\right)^2 \quad \text{für} \quad \alpha \le vT \le 1 - \alpha \quad \text{und} \quad \alpha \le 0, 5.$$
(B-22)

3. $1-\alpha \leq vT \leq 1$:

Das Integral aus (B-20) muss wieder in 2 Abschnitte aufgeteilt werden:

Abschnitt 1 $0...\frac{vT + \alpha - 1}{2T}$: Der erste Teil der abfallende Flanke von G(f + v/2)überlagert sich mit dem letzten Teil der ansteigenden Flanke von G(f - v/2).

$$I_{31} = 2T \int_{0}^{\frac{\nu T + \alpha - 1}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT - \frac{1 - \alpha - \nu T}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(fT + \frac{1 - \alpha - \nu T}{2}\right)\right) df$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(1 - \alpha - \nu T\right)\right) T \int_{0}^{\frac{\nu T + \alpha - 1}{2T}} df + T \int_{0}^{\frac{\nu T + \alpha - 1}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}fT\right) df$$
$$= \frac{\nu T + \alpha - 1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(1 - \nu T\right)\right) + \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}fT\right)}{\sum_{\alpha}\left(1 - \nu T\right)} \int_{0}^{\frac{\nu T + \alpha - 1}{2T}} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\left(1 - \nu T\right)\right)$$

Abschnitt 2 $\frac{\alpha - 1 + \nu T}{2T}$... $\frac{\alpha + 1 - \nu T}{2T}$: Der letzte Teil der abfallende Flanke von $G(f + \nu/2)$ überlagert sich mit $G(f - \nu/2) = 1$.

$$I_{32} = 2T \int_{\frac{\alpha-1+\nu T}{2T}}^{\frac{\alpha+1-\nu T}{2T}} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) df = \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(fT - \frac{1-\alpha-\nu T}{2}\right)\right) \Big|_{\frac{\alpha-1+\nu T}{2T}}^{\frac{\alpha+1-\nu T}{2T}}$$
$$= \frac{4\alpha}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(1-\nu T)\right)\right)$$

Das zweite Integral aus (B-15) ist Null. Es folgt:

$$P_{\rm S3} = \left(I_{31} + I_{32}\right)^2 = \left(\frac{4\alpha}{\pi} + \frac{\nu T + \alpha - 1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}(1 - \nu T)\right) - \frac{3\alpha}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(1 - \nu T)\right)\right)^2.$$
(B-23)
für $1 - \alpha \le \nu T \le 1$ und $\alpha \le 0,5$

Die Berechnung der ISI-Leistung erfolgt gemäß (B-8).

Zusammenfassung der Ergebnisse:

Gesamtleistung:

$$P_{\text{tot}} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha + vT}{2} + \frac{\alpha - vT}{2} \cos\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\pi} \sin\left(\pi \frac{vT}{\alpha}\right) & \text{für } 0 \le vT \le \alpha & \text{und } \alpha \le 0,5 \\ 1 - vT & \text{für } \alpha < vT \le 1 - \alpha & \text{und } \alpha \le 0,5 \\ \frac{\alpha - 3vT + 3}{4} - \frac{\alpha + vT - 1}{8} \cos\left(\pi \frac{1 - vT}{\alpha}\right) - \frac{3\alpha}{8\pi} \sin\left(\pi \frac{1 - vT}{\alpha}\right) & \text{für } 1 - \alpha < vT \le 1 & \text{und } \alpha \le 0,5 \end{cases}$$

$$(B-24)$$

Nutzleistung:

$$\left[\left(1 - \alpha - vT + (\alpha - vT) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{vT}{\alpha}\right) + \frac{4\alpha}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{vT}{\alpha}\right) \right]^2 \quad \text{für } 0 \le vT \le \alpha \qquad \text{und } \alpha \le 0,5$$

$$P_{\rm S} = \begin{cases} \left(\frac{i\alpha}{\pi} - \alpha - vT + 1\right) & \text{für } \alpha < vT \le 1 - \alpha \quad \text{und } \alpha \le 0,5 \\ \left(\frac{4\alpha}{\pi} + \frac{\alpha + vT - 1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1 - vT}{\alpha}\right) - \frac{3\alpha}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1 - vT}{\alpha}\right)\right)^2 & \text{für } 1 - \alpha < vT \le 1 \quad \text{und } \alpha \le 0,5 \end{cases}$$

$$(B-25)$$

Der Zusammenhang zwischen der Nutz- bzw. der ISI-Leistung und dem Abtastzeitfehler ist in Abb. B-1 für verschiedene Roll-off-Faktoren α dargestellt. Abb. B-2 zeigt die per Simulation ermittelten Bitfehlerkurven für verschiedene Frequenzablagen νT . Typisch ist das Ausflachen der Kurven für große $E_{\rm b}/N_0$ bei zu großem νT . Nimmt man an, dass die ISI-Werte näherungsweise komplex Gauss-verteilt sind, kann man die asymptotische Bitfehlerwahrscheinlichkeit bereits aus der statischen Bitfehlerkurve des Modulationsverfahrens abschätzen, indem man mit Hilfe der Beziehung $101g \frac{E_{\rm b}}{N_0} = 101g \frac{P_{\rm s}}{P_{\rm ISI}} - 101g(\mathrm{Id}\,M)$ ein äquivalentes $E_{\rm b}/N_0$ in dB ermittelt. (IdM ist die Anzahl der Bits pro Symbol.)

SyncB_FreqErr.doc



Abb. B-1: Nutz- und ISI-Leistung nach dem Signal-angepassten Filter auf Grund einer statischen Frequenzablage



Abb. B-2: Bitfehlerwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom E_b/N_0 für QAM mit $\alpha = 0,25$ für verschiedene statische Frequenzablagen. Annahmen: Idealer Abtastzeitpunkt und perfekte Phasenkenntnis im Symboldetektor

Anhang C: Berechnung der Cramer-Rao-Schranke aus dem ungestörten Empfangssignal

Es sei

$$r(t) = s(t \mid \lambda, \underline{u}) + w(t)$$
(C-1)

ein beobachtbares bandbegrenztes Empfangssignal in äquivalenter Basisbanddarstellung.

Darin ist

- *w(t)* eine Musterfunktion eines weißen Gauß'schen Rauschprozesses mit der Rauschleistungsdichte N_0 . (*Hinweis: in der Literatur wird hier häufig 2N*₀ angesetzt. Das ergibt sich, wenn man die in der Literatur übliche Umrechnung eines reellen HF-Signals in die äquivalente Basisbanddarstellung vornimmt. Wir verwenden jedoch bei der Umrechnung den Faktor $1/\sqrt{2}$, so dass die Leistung in der äquivalenten Basisbanddarstellung identisch ist mit der Leistung des zugehörigen HF-Signals. Diese Definition vermeidet einige Probleme.)
- s(t|...) das ungestörte Empfangssignal, das von einigen Parametern abhängt. Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit werden die für die Schätzung relevanten Parameter neben der Zeitvariablen *t* explizit angegeben.
- λ den zu schätzenden Parameter, der entweder die Frequenzablage ν , die Phase θ oder die Zeitverzögerung τ sein kann.
- einen Vektor mit allen unerwünschten Parametern, die die Datensymbole c[i] und die anderen Synchronisationsparameter beinhalten. Wenn z.B. die Frequenzablage ν zu schätzen ist, beinhaltet u auch θ und τ .

Für linear modulierte Signale ist das ungestörte Empfangssignal gegeben durch

$$s(t \mid \lambda, \underline{u}) = h e^{j(2\pi \nu t + \theta)} \sum_{i} a[i] g(t - iT - \tau).$$
(C-2)

Darin ist *h* der Kanalübertragungsfaktor.

Zur Anwendung der Ergebnisse der Schätztheorie auf einen Nachrichtenempfänger muss das Problem der Zeitdiskretisierung überwunden werden. Die Ergebnisse der Schätztheorie basieren auf der Annahme, dass ein Beobachtungsvektor <u>r</u> mit endlich vielen Elementen vorliegt. Im Nachrichtenempfänger liegt aber ein zeitkontinuierliches Signal r(t) vor. Zur Lösung des Problems wird vorübergehend eine Abtastung des Empfangssignals mit vorhergehender Filterung gemäß Abb. C-1 betrachtet.



Abb. C-1: Gedankenmodell zur Zeitdiskretisierung der Signale in einem Trägerfrequenzempfänger

Das Filter hat den einzigen Zweck, die Leistung des Rauschsignals zu begrenzen, ohne das Nutzsignal zu verzerren. Diese Anforderung erfüllt z.B. ein idealer Tiefpass, dessen Grenzfrequenz f_{TP} größer als die halbe Nutzsignalbandbreite ist. Mit $B = 2f_{TP}$ sei die gesamte Bandbreite des Filters bezeichnet. Am Ausgang des Filters ist die Leistung des Rauschens begrenzt auf BN_0 . Im Folgenden sei das gefilterte Rauschsignal mit w'(t) und dessen Abtastwerte seien mit $w'[k] = w'(kT_A)$ bezeichnet.

Die Abtastung erfolgt mit der Rate $1/T_A = B$. Die Folge der Abtastwerte r[k] bildet die Basis für die Schätzung. Dann kann jeder Abtastwert in der Form

$$r'[k] = s \left\lceil k | \underline{\lambda}, \underline{u} \right\rceil + w'[k].$$
(C-3)

dargestellt werden. Durch diese Anordnung ist sichergestellt, dass die Folge der Abtastwerte die vollständige Information über das Nutzsignal enthält und die Rauschanteile in aufeinander folgenden Abtastwerten statistisch unabhängig voneinander sind.

Betrachtet werden *K* Abtastwerte des Signals r'(t), die zum Vektor \underline{r}' zusammengefasst werden. Die zentrale Größe zur Berechnung der Cramer-Rao-Schranke (CRB) ist die Likelihoodfunktion des Vektors \underline{r}' mit Abtastwerten des Empfangssignals. Sie ist gegeben durch

$$p_{\underline{R}'|\lambda}\left(\underline{r}'|\lambda\right) = \frac{1}{\left(\pi\sigma_{W'}^{2}\right)^{K}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_{W'}^{2}}\sum_{k=1}^{K}\left|r'[k] - s\left[k\left|\lambda\right]\right|^{2}\right).$$
(C-4)

Für deren Logarithmus ergibt sich

$$\ln p_{\underline{R}'|\lambda}(\underline{r}'|\lambda) = -\frac{1}{\sigma_{W'}^{2}} \sum_{k=1}^{K} |r'[k] - s[k|\lambda]|^{2} - K \ln(\pi \sigma_{W'}^{2})$$
$$= -\frac{1}{\sigma_{W'}^{2}} \sum_{k=1}^{K} (r'[k] - s[k|\lambda]) (r'^{*}[k] - s^{*}[k|\lambda]) - K \ln(\pi \sigma_{W'}^{2}).$$

Die Differentiation bzgl. λ liefert nach Anwendung der Produktregel auf die Summenterme

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln p_{\underline{R}'\lambda}(\underline{r}'|\lambda) = \frac{1}{\sigma_{W'}^2} \sum_{k=1}^{K} \left(\left(r'^*[k] - s^*[k|\lambda] \right) \frac{\partial s[k|\lambda]}{\partial\lambda} + \left(r'[k] - s[k|\lambda] \right) \frac{\partial s^*[k|\lambda]}{\partial\lambda} \right)$$
$$= \frac{2}{\sigma_{W'}^2} \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Re}\left\{ \left(r'^*[k] - s^*[k|\lambda] \right) \frac{\partial s[k|\lambda]}{\partial\lambda} \right\}$$

Nochmalige Differentiation nach λ liefert

SyncC_CRB.doc

٢

٦

$$\frac{\partial^{2}}{\partial\lambda^{2}}\ln p_{\underline{R}'|\lambda}\left(\underline{r}'|\lambda\right) = \frac{2}{\sigma_{W'}^{2}}\sum_{k=1}^{K}\operatorname{Re}\left\{w'^{*}\left[k\right]\frac{\partial^{2}s\left[k|\lambda\right]}{\partial\lambda^{2}} - \underbrace{\frac{\partial s^{*}\left[k|\lambda\right]}{\partial\lambda}\frac{\partial s\left[k|\lambda\right]}{\partial\lambda}}_{\left[\frac{\partial...\right]^{2}}{\partial\lambda}}\right\}.$$
 (C-5)

Darin wurde zur kompakteren Darstellung $w'[k] = r'[k] - s[k|\lambda]$ substituiert.

Die Erwartungswertbildung ist über <u>R</u>' durchzuführen. Die einzige stochastische Größe, die in <u>R</u>' eingeht, ist aber <u>W</u>', so dass der Erwartungswert auch über <u>W</u>' gebildet werden kann. Da <u>W</u>' mittelwertfrei ist, d.h. E[W'[k]] = 0 für alle k gilt, ist der Erwartungswert des ersten Terms von (C-5) Null. Der zweite Term in der geschweiften Klammer ist reell. Damit folgt

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln p_{R|\lambda}\left(r\,|\,\lambda\right)\right] = -\frac{2}{\sigma_{W'}^2}\sum_{k=1}^{K}\left|\frac{\partial s\left[k\,|\lambda\right]}{\partial\lambda}\right|^2.$$
 (C-6)

Ersetzt man die Rauschvarianz $\sigma_{W'}^2$ durch $N_0 B$ bzw. durch N_0/T_A erhält man

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\lambda^{2}}\ln p_{R|\lambda}\left(r \mid \lambda\right)\right] = -\frac{2}{N_{0}}\sum_{k=1}^{K} \left|\frac{\partial s\left[k \mid \lambda\right]}{\partial\lambda}\right|^{2} T_{A}.$$
(C-7)

Für den Grenzübergang $T_A \rightarrow 0$ geht $K = T_0/T_A$ für ein festes Beobachtungsintervall der Dauer T_0 gegen unendlich und der Summenausdruck konvergiert gegen das Integral der entsprechenden Zeitfunktion. Es folgt schließlich

$$\mathbf{E}\left[\frac{\partial^{2}}{\partial\lambda^{2}}\ln p_{R|\lambda}\left(r\,|\,\lambda\right)\right] = -\frac{2}{N_{0}}\int_{T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t\,|\,\lambda,\underline{u}\right)}{\partial\lambda}\right|^{2}dt.$$
 (C-8)

Mit dieser Beziehung lässt sich die Cramer-Rao-Schranke (CRB) direkt als Funktion des ungestörten Empfangssignals ausdrücken:

$$\mathbf{E}\left[\left(\hat{\lambda}(\underline{R})-\lambda\right)^{2}\right] \geq \frac{N_{0}/2}{\int_{T_{0}}\left|\frac{\partial s(t \mid \lambda, \underline{u})}{\partial \lambda}\right|^{2} dt}.$$
(C-9)

Anhang D

Anhang D: Modifizierte Cramer-Rao-Schranke für Frequenzschätzung

$$s(t | v, \underline{u}) = e^{j(2\pi vt + \theta)} \sum_{i} a[i] g(t - iT - \tau) \text{ mit } \underline{u} = \{\theta, \tau, ..., a_{-1}, a_{0}, a_{1}, ..., a_{i}, ...\}$$
(D-1)

$$\frac{\partial s(t | v, \underline{u})}{\partial v} = j2\pi t e^{j(2\pi vt + \theta)} \sum_{i} a[i] g(t - iT - \tau)$$

$$\left| \frac{\partial s(t | v, \underline{u})}{\partial v} \right|^{2} = 4\pi^{2} \sum_{i} \sum_{k} a[i] a^{*}[k] t^{2} g(t - iT - \tau) g^{*}(t - kT - \tau)$$

$$t_{0}^{t_{0}+T_{0}} \left| \frac{\partial s(t | v, \underline{u})}{\partial v} \right|^{2} dt = 4\pi^{2} \sum_{i} \sum_{k} a[i] a^{*}[k] g(t - iT - \tau) g^{*}(t - kT - \tau) dt$$

$$= 4\pi^{2} \sum_{i} \sum_{k} a[i] a^{*}[k] \int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}} t^{2} g(t - iT - \tau) g^{*}(t - kT - \tau) dt$$
(D-2)

Dieser Ausdruck ist bereits unabhängig von θ , so dass die Erwartungswertbildung nur noch über τ und die Symbolfolge $\{a[i]\}$ durchzuführen ist. Bevor das Integral gelöst wird, ist es zweckmäßig, zunächst den Erwartungswert über die Datensymbole zu bilden:

$$\mathbf{E}_{\left\{a\right\}}\left[\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t\mid \mathbf{V},\underline{u}\right)}{\partial \mathbf{V}}\right|^{2}dt\right] = 4\pi^{2}\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}t^{2}\sum_{k}\sum_{k}\mathbf{E}\left[a\left[i\right]a^{*}\left[k\right]\right]g\left(t-iT-\tau\right)g^{*}\left(t-kT-\tau\right)dt.$$
(D-3)

Für eine gedächtnislose Quelle ist der Erwartungswert für $i \neq k$ gleich Null. Mit der Abkürzung $C_2 = E[|a[k]|^2]$ ergibt sich

$$\mathbf{E}_{\{a\}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left|\frac{\partial s(t \mid v, \underline{u})}{\partial v}\right|^2 dt\right] = 4\pi^2 C_2 \int_{t_0}^{t_0+T_0} t^2 \sum_i \left|g(t - iT - \tau)\right|^2 dt.$$
(D-4)

Der Summenausdruck liefert eine periodische Funktion in t und τ mit der Periode T. Er kann mit Hilfe der Poisson-Formel umgeformt werden in

$$\sum_{i} \left| g\left(t - iT - \tau\right) \right|^{2} = \frac{1}{T} \sum_{n} G_{2}\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n(t-\tau)/T}$$
(D-5)

mit $G_2(f)$ als Fourier-Transformierte von $|g(t)|^2$. Somit folgt

$$\mathbf{E}_{\left\{a\right\}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left|\frac{\partial s\left(t \mid \boldsymbol{\nu}, \underline{\boldsymbol{u}}\right)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|^2 dt\right] = 4\pi^2 \frac{C_2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_0} t^2 \sum_n G_2\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n(t-\tau)/T} dt.$$
(D-6)

Als nächstes ist es zweckmäßig, den Erwartungswert über τ zu bilden. Unter der Annahme, dass t_0 völlig unabhängig von τ ist, kann man für τ eine Gleichverteilung zwischen 0 und T annehmen. Die einzige Größe, die von τ abhängt, ist die komplexe Exponentialfunktion, die aber bezüglich τ für $n \neq 0$ periodisch mit der Periode T/n ist. Somit gilt

$$\mathbf{E}_{\tau} \left[e^{j2\pi n(t-\tau)/T} \right] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0\\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$
(D-7)

SyncD_CRBfreq.doc

20.10.2016

Unter der Summe ist also nur noch der Term für n = 0 von Null verschieden. Also folgt

$$\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t \mid V, \underline{u}\right)}{\partial v}\right|^{2} dt\right] = 4\pi^{2} \frac{C_{2}}{T} \int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}} t^{2}G_{2}\left(0\right) dt \qquad (D-8)$$

Es ist also nur noch die Fourier-Transformierte von $|g(t)|^2$ an der Stelle f = 0 von Interesse. Diese ist gegeben durch $G_2(f=0) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = E_g$, wobei E_g die Energie des Modulationsgrundimpulses bezeichnet. Mit $E_S = C_2 E_g$ als mittlere Symbolenergie lässt sich (D-8) umformulieren in

$$\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left|\frac{\partial s\left(t \mid \boldsymbol{V}, \underline{u}\right)}{\partial \boldsymbol{v}}\right|^2 dt\right] = 4\pi^2 \frac{E_s}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_0} t^2 dt .$$
(D-9)

Für das Integral ergibt sich

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} t^2 dt = \frac{1}{3} \left(\left(t_0 + T_0 \right)^3 - t_0^3 \right).$$
 (D-10)

Da die Cramer-Rao-Schranke für alle t_0 gelten muss, erhält man die am dichtesten liegende Grenze für den Wert t_0 , der den Ausdruck zur Berechnung der Schranke maximiert. Da das Integral (D-10) im Nenner steht, ist dessen Minimum zu bestimmen. Differentiation nach t_0 und Null-setzen liefert $(t_0+T_0)^2 - t_0^2 = 0$, d. h. $t_0 = -T_0/2$. Für dieses t_0 liefert das Integral den Wert

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} t^2 dt = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} T_0^3 + \frac{1}{8} T_0^3 \right) = \frac{1}{12} T_0^3.$$
 (D-11)

Es folgt

$$\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left|\frac{\partial s(t \mid \nu, \underline{u})}{\partial \nu}\right|^2 dt\right] = \frac{\pi^2}{3} \frac{E_s}{T} T_0^3.$$
(D-12)

Ist das Intervall eine ganzzahlige Anzahl L_0 von Symbolen lang, kann $T_0 = L_0 T$ geschrieben werden. Das liefert schließlich das Ergebnis

$$\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left|\frac{\partial s\left(t \mid \mathbf{V}, \underline{u}\right)}{\partial v}\right|^2 dt\right] = \frac{\pi^2}{3} E_s L_0^{3} T^2.$$
(D-13)

Daraus folgt für die modifizierte Cramer-Rao-Schranke

$$MCRB(vT) = \frac{N_0/2}{E_{\underline{u}} \left[\int_{T_0} \left| \frac{\partial s(t \mid \tau, \underline{u})}{\partial \tau} \right|^2 dt \right]} T^2 = \frac{3}{2\pi^2} \frac{1}{L_0^3 E_s/N_0}.$$
 (D-14)

Anhang F: Modifizierte Cramer-Rao-Schranke für Zeitschätzung

$$s(t \mid \tau, \underline{u}) = e^{j(2\pi\nu t + \theta)} \sum_{i} a[i] g(t - iT - \tau) \operatorname{mit} \underline{u} = \{\theta, \nu, ..., a_{-1}, a_0, a_1, ..., a_i, ...\}$$
(F-1)

$$\frac{\partial s(t \mid \tau, \underline{u})}{\partial \tau} = -e^{j(2\pi vt + \theta)} \sum_{i} a[i]g'(t - iT - \tau)$$

$$\left|\frac{\partial s(t \mid \tau, \underline{u})}{\partial \tau}\right|^2 = \sum_{i} \sum_{k} a[i] a^*[k] g'(t - iT - \tau) g'^*(t - kT - \tau)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left| \frac{\partial s(t \mid \tau, \underline{u})}{\partial \tau} \right|^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sum_i \sum_k a[i] a^*[k] g'(t - iT - \tau) g'^*(t - kT - \tau) dt$$
$$= \sum_i \sum_k a[i] a^*[k] \int_{t_0}^{t_0+T_0} g'(t - iT - \tau) g'^*(t - kT - \tau) dt$$
(F-2)

Dieser Ausdruck ist bereits unabhängig von ν und θ , so dass die Erwartungswertbildung nur noch über die Symbolfolge {a[i]} durchzuführen ist. Bevor das Integral betrachtet wird, ist es zweckmäßig, zunächst den Erwartungswert über die Datensymbole zu bilden:

$$\mathbf{E}_{\left\{a\right\}}\left[\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t\mid\tau,\underline{u}\right)}{\partial\tau}\right|^{2}dt\right] = \sum_{i}\sum_{k}\mathbf{E}\left[a\left[i\right]a^{*}\left[k\right]\right]\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}g'\left(t-iT-\tau\right)g'^{*}\left(t-kT-\tau\right)dt.$$
 (F-3)

Für eine gedächtnislose Quelle ist der Erwartungswert für $i \neq k$ gleich Null. Mit der Abkürzung $C_2 = E[|a[k]|^2]$ ergibt sich

$$\mathbf{E}_{\left\{a\right\}}\left[\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t \mid \tau, \underline{u}\right)}{\partial \tau}\right|^{2} dt\right] = C_{2} \int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}} \sum_{i} \left|g'\left(t - iT - \tau\right)\right|^{2} dt.$$
(F-4)

Der Summenausdruck liefert eine periodische Funktion in t und τ mit der Periode T. Er kann mit Hilfe der Poisson-Formel umgeformt werden in

$$\sum_{i} \left| g'(t - iT - \tau) \right|^2 = \frac{1}{T} \sum_{n} G_2\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n(t-\tau)/T}$$
(F-5)

mit $G_2(f)$ als Fourier-Transformierte von $|g'(t)|^2$. Somit folgt

$$\mathbf{E}_{\{a\}}\left[\int_{t_0}^{t_0+T_0} \left| \frac{\partial s\left(t \mid \tau, \underline{u}\right)}{\partial \tau} \right|^2 dt \right] = \frac{C_2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sum_n G_2\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n(t-\tau)/T} dt = \frac{C_2}{T} \sum_n G_2\left(\frac{n}{T}\right) \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi n(t-\tau)/T} dt}_{=L_0T \text{ für } n=0, =0 \text{ für } n\neq 0} (F-6)$$

Unter der Annahme, dass das Beobachtungsintervall der Dauer T_0 immer aus einer ganzen Anzahl von Symbolintervallen der Dauer *T* besteht, liefert das Integral für $n \neq 0$ immer den Wert Null. Für n = 0 liefert es den Wert L_0T . Dies ist unabhängig vom Startzeitpunkt t_0 des Integrationsintervalls. $G_2(f)$ lässt sich durch die Fourier-Transformierte G(f) des Modulationsgrundimpulses g(t) ausdrücken. Die Fourier-Transformierte der Ableitung g'(t) ist gegeben durch $j2\pi fG(f)$. Der Bildung des Betragsquadrats im Zeitbereich entspricht einer Autokorrelation im Frequenzbereich, d.h. es gilt

$$|g'(t)|^2 = g'(t)g'^*(t) \quad \leftrightarrow \quad G_2(f) = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} (v+f)G(v+f)vG^*(v)dv.$$
 (F-7)

Damit folgt schließlich aus (F-6)

$$\mathbf{E}_{\underline{u}}\left[\int_{t_{0}}^{t_{0}+T_{0}}\left|\frac{\partial s\left(t \mid \tau, \underline{u}\right)}{\partial \tau}\right|^{2} dt\right] = \frac{C_{2}}{T}G_{2}\left(0\right) = 4\pi^{2}L_{0}C_{2}\int_{-\infty}^{\infty}f^{2}\left|G\left(f\right)\right|^{2} df .$$
(F-8)

Die Energie pro Symbol ist gegeben durch

$$E_{s} = C_{2}E_{g} = C_{2}\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^{2} dt = C_{2}\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^{2} df$$
 (F-9)

Setzt man C2 aus (F-9) in (F-8) ein, folgt unmittelbar die modifizierte Cramer-Rao-Schranke für Zeitschätzung:

$$MCRB\left(\frac{\tau}{T}\right) = \frac{N_0/2}{E_{\underline{u}}\left[\int_{T_0} \left|\frac{\partial s(t \mid \tau, \underline{u})}{\partial \tau}\right|^2 dt\right]} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{L_0 \xi E_s/N_0}.$$

Darin ist

$$\xi = T^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \left| G(f) \right|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| G(f) \right|^2 df}$$

ein dimensionsloser Parameter, der aus dem Energiespektrum $|G(f)|^2$ des Modulationsgrundimpulses g(t) berechenbar ist.

Anhang G: Rauschanalyse der Frequenzschätzer

1 Phasendifferenzmittelung

Die Phasendifferenzmittelung basiert auf den Werten $z[k]z^*[k-1]$. Mit

$$z[k] = e^{j2\pi kT} + n[k] = z_0^k + n[k]$$
(G-1)

aus Kap. 4 (Formel (4-15)) folgt:

$$z[k]z^{*}[k-1] = (z_{0}^{k} + n[k])(z_{0}^{-(k-1)} + n^{*}[k-1])$$

= $z_{0} + z_{0}^{k}n^{*}[k-1] + z_{0}^{-(k-1)}n[k] + n[k]n^{*}[k-1]$
= $z_{0}(1 + z_{0}^{k-1}n^{*}[k-1] + z_{0}^{-k}n[k] + z_{0}^{-1}n[k]n^{*}[k-1]).$

Zur kompakteren Darstellung bezeichnen mit $n'[k] = n[k]z_0^{-k}$ die in der Phase gedrehten Rauschwerte. Entsprechend gilt $n'^{*}[k] = n^{*}[k]z_0^{k}$. Offensichtlich hat n'[k] die gleiche Varianz wie n[k]. Damit ergibt sich

$$z[k]z^{*}[k-1] = z_{0}\left(1 + n^{\prime *}[k-1] + n^{\prime}[k] + n^{\prime}[k]n^{\prime *}[k-1]\right).$$
(G-2)

Aus diesen Werten wird der Winkel ermittelt.

Zunächst betrachten wir sehr großes E_S/N_0 , d.h. $\sigma^2 = N_0/T \ll 1$. Dann ist das Produkt zweier statistisch unabhängiger Rauschwerte vernachlässigbar und es gilt

$$\arg(z[k]z^*[k-1]) \approx \arg(z_0) + \arg(1+n'^*[k-1]+n'[k]).$$

Darin ist der erste Term der gewünschte Ausdruck und der zweite Term stellt das Phasenrauschen dar.

Die anschließende Mittelwertbildung liefert

$$\frac{1}{L_0} \sum_{k=2}^{L_0} \arg\left(z[k] z^*[k-1]\right) \approx 2\pi v T + \frac{1}{L_0} \sum_{k=2}^{L_0} \arg\left(1 + n'^*[k-1] + n'[k]\right)$$

Die arg-Funktion wird realisiert durch die arctan-Funktion des Quotienten aus Imaginärteil und Realteil. Da der Imaginärteil nur aus Rauschen besteht, der Realteil aber aus 1 + Rauschen, kann man für $\sigma^2 \ll 1 \arg(x) \approx \operatorname{Im}\{x\}$ setzen. Es folgt

$$\frac{1}{L_0} \sum_{k=2}^{L_0} \arg\left(z[k] z^*[k-1]\right) \approx 2\pi v T + \frac{1}{L_0} \sum_{k=2}^{L_0} \operatorname{Im}\left\{n'^*[k-1] + n'[k]\right\}.$$

Die Summe lässt sich wie folgt schreiben:

$$\sum_{k=2}^{L_{0}} \dots = n'^{*}[1] + n'[2] + n'[3] + n'^{*}[3] + n'^{*}[3] + n'[4] \\ \vdots + n'^{*}[J] + n'^{*}[L_{0} - 2] + n'[L_{0} - 1] + n'^{*}[L_{0} - 1] + n'^{*}[L_{0} - 1] + n'[L_{0}]$$

Offensichtlich erscheinen alle Rauschwerte n [k] für $k = 2...L_0-1$ auch konjugiert komplex, so dass die paarweise Addition den rein reellen Wert $2\text{Re}\{n[k]\}$ ergibt. Die Summe liefert also

$$\sum_{k=2}^{L_0} \dots = n^{\prime^*} [1] + n' [L_0] + 2 \sum_{k=2}^{L_0-1} \operatorname{Re} \{n'[k]\}.$$

Zum Imaginärteil des Rauschens tragen also nur der erste und der letzte Abtastwert bei. Es folgt für den Frequenzschätzwert:

$$\hat{v}T \approx vT + \frac{1}{2\pi (L_0 - 1)} (\operatorname{Im}\{n'^*[1]\} + \operatorname{Im}\{n'[L_0]\}).$$

Die beiden Rauschanteile sind statistisch unabhängig voneinander und haben jeweils die Varianz $\sigma^2/2$. Für die Varianz des Frequenzschätzwertes folgt

$$\sigma_{\hat{v}T}^{2} = E\left[\left(\hat{v}T - vT\right)^{2}\right] \approx \frac{1}{4\pi^{2} \left(L_{0} - 1\right)^{2} E_{s}/N_{0}} \text{ für } E_{s}/N_{0} >> 1.$$
 (G-3)

Die Fehlervarianz liegt etwa um den Faktor $L_0/6$ über der Cramer-Rao-Schranke:

$$\frac{\sigma_{vT}^2}{CRB(vT)} \approx \frac{2\pi^2 L_0^3 E_{\rm S}/N_0}{3 \cdot 4\pi^2 (L_0 - 1)^2 E_{\rm S}/N_0} \approx \frac{L_0}{6}.$$
 (G-4)

2 Fitz-Schätzer und L&R-Schätzer

Der Schätzer nach Fitz und der von Luise und Reggianinni basiert auf Werten

$$R[\kappa] = \frac{1}{L_0 - \kappa} \sum_{k=1}^{L_0 - \kappa} z[k + \kappa] z^*[k].$$
 (G-5)

Die Verallgemeinerung von (G-2) für $\kappa > 1$ liefert

$$z[k+\kappa]z^*[k] = z_0 \left(1 + n'^*[k] + n'[k+\kappa] + n'[k+\kappa]n'^*[k] \right).$$
(G-6)

Für $k = \kappa + 1$, $\kappa + 2$, ..., $L_0 - \kappa$ kommt jeder Rauschwert n'[k] in der Summe zweimal vor: Original und konjugiert komplex, so dass von diesen Rauschwerten nur der doppelte Realteil gemäß $2 \operatorname{Re} \{n'[k]\} = n'[k] + n'^*[k]$ in die Summe eingeht. Damit erhält man

$$R[\kappa] = z_0^{\kappa} \left[1 + \frac{1}{L_0 - \kappa} \left(\sum_{\substack{k=\kappa+1\\ L_0 - 2\kappa}}^{L_0 - \kappa} 2\operatorname{Re}\left\{n'[k]\right\} + \sum_{\substack{k=L_0 - \kappa+1\\ 2\kappa}}^{L_0} n'[k] + \sum_{\substack{k=1\\ 2\kappa}}^{\kappa} n'^*[k] + \sum_{\substack{k=1\\ k=1}}^{L_0 - \kappa} n'[k + \kappa]n'^*[k] \right) \right]$$

= $z_0^{\kappa} (1 + n'')$.

Für die Auswirkung des Rauschens ist der Phasenwinkel von 1+n'' maßgebend. Dessen Imaginärteil beeinflusst nur die Phase, während der Realteil sowohl die Phase als auch die Amplitude beeinflusst. Wegen der Summenbildung ist N'' in guter Näherung wieder Gaußverteilt, wenngleich einzelne Komponenten K_0 -verteilt sind.

Es werden nun die Rauschvarianzen für Real und Imaginärteil berechnet. Zunächst betrachten wir den letzten Summenterm. Die Summanden bestehen jeweils aus dem Produkt zweier komplexer Gauß'scher Zufallsvariabler, die eine zweidimensionale K₀-Verteilung für Realund Imaginärteil aufweisen (siehe Anhang 5). Wegen der Unabhängigkeit der beiden an jedem Produkt beteiligten Zufallsvariablen ist die Varianz gleich dem Produkt der beiden Einzelvarianzen, d. h. σ_N^4 . Die Summe von $L_0 - \kappa$ Zufallsvariablen hat die Varianz ($L_0 - \kappa$) σ_N^4 . Sie verteilt sich je zur Hälfte auf Real- und Imaginärteil.

Wir betrachten nun die ersten drei Summenausdrücke gemeinsam. Hier ist die Varianz für Real- und Imaginärteil verschieden.

Der Realteil entsteht aus der Addition von $L_0-2\kappa$ statistisch unabhängigen Gauß-verteilten Zufallsvariablen mit der Varianz $\sigma_N^2/2$, deren Amplituden mit dem Faktor 2 multipliziert werden und weiteren 2κ unabhängigen Gauß-verteilten Zufallsvariablen mit der Varianz $\sigma_N^2/2$. Unter Einbeziehung des letzten Summenterms erhält man für die Varianz des Realteils der Zufallsvariable *N''* schließlich

$$\sigma_{\text{Re}\{N'\}}^{2} = \frac{1}{\left(L_{0} - \kappa\right)^{2}} \left[\underbrace{4\left(L_{0} - 2\kappa\right)\frac{\sigma_{N}^{2}}{2} + \underbrace{2\kappa\frac{\sigma_{N}^{2}}{2}}_{2.+3.Summe} + \underbrace{\left(L_{0} - \kappa\right)\frac{\sigma_{N}^{4}}{2}}_{4.Summe} \right] \right]$$
$$= \frac{\sigma_{N}^{2}}{\left(L_{0} - \kappa\right)^{2}} \left[2\left(L_{0} - 2\kappa\right) + \kappa + \left(L_{0} - \kappa\right)\frac{\sigma_{N}^{2}}{2} \right] \right]$$
$$= \frac{\sigma_{N}^{2}}{2} \frac{1}{L_{0} - \kappa} \left(4 - \frac{2\kappa}{L_{0} - \kappa} + \sigma_{N}^{2}\right)$$

Für $\kappa = 1, 2, \dots L_0/2$ ist die Rauschvarianz im Realteil mindestens um den Faktor $4/L_0$ reduziert.

Der Imaginärteil der ersten Summenterme entsteht aus der Addition von 2κ unabhängigen Gauß-verteilten Zufallsvariablen mit der Varianz $\sigma_N^2/2$. Unter Einbeziehung des letzten Summenterms erhält man für die Varianz des Imaginärteils von N'' schließlich

$$\sigma_{\mathrm{Im}\{N''\}}^{2} = \frac{1}{\left(L_{0}-\kappa\right)^{2}} \left[2\kappa \frac{\sigma_{N}^{2}}{2} + \left(L_{0}-\kappa\right) \frac{\sigma_{N}^{4}}{2} \right]$$
$$= \frac{\sigma_{N}^{2}}{\left(L_{0}-\kappa\right)^{2}} \left[\kappa + \left(L_{0}-\kappa\right) \frac{\sigma_{N}^{2}}{2} \right]$$
$$= \frac{\sigma_{N}^{2}}{2} \frac{1}{L_{0}-\kappa} \left(\frac{2\kappa}{L_{0}-\kappa} + \sigma_{N}^{2} \right)$$

Mit wachsendem κ wird die Rauschvarianz im Imaginärteil größer. Der Rauschunterdrückungsfaktor im Imaginärteil beträgt für $E_S/N_0 >> 1$ etwa $2/(L_0-1)^2$ für $\kappa = 1$ bzw. $4/L_0$ für $\kappa = L_0/2$.

Zur Beurteilung der Varianz des Schätzfehlers beim Fitz-Schätzer müssen wir noch die Summation

$$\hat{v} = \frac{1}{\pi K (K+1)T} \sum_{\kappa=1}^{K} \arg \left\{ R[\kappa] \right\}.$$

betrachten. Da die Rauschwerte von $R[\kappa]$ bei verschiedenen κ voneinander abhängig sind, können wir nicht einfach die Varianzen des Phasenrauschens der einzelnen Anteile addieren. Vielmehr müssen wir untersuchen, wie die einzelnen Rauschwerte in das Gesamtergebnis eingehen. Dazu müsste man zunächst die Zufallsvariable $\alpha = \arctan(\operatorname{Im}\{N''\}/(1+\operatorname{Re}\{N''\}))$ berechnen und diese dann für alle κ addieren. Dies ist jedoch nicht mehr handhabbar. Deshalb beschränken wir uns auf eine Näherung. Wir nehmen an, dass das Rauschen hinreichend klein ist, d. h. $\sigma_{\operatorname{Im}\{N'\}}^2 \ll 1$. Dann ist $\arctan(\operatorname{Im}\{N''\}/(1+\operatorname{Re}\{N''\}) \approx \operatorname{Im}\{N''\}$ und wir müssen nur noch über die Imaginärteile von N'' addieren. Es folgt:

$$\sum_{\kappa=1}^{K} \arg\left(R[\kappa]\right) \approx \sum_{\kappa=1}^{K} 2\pi\kappa\nu T + \sum_{\kappa=1}^{K} \frac{1}{L_{0} - \kappa} \operatorname{Im}\left\{\sum_{k=L_{0}-\kappa+1}^{L_{0}} n'[k] + \sum_{k=1}^{K} n'^{*}[k] + \sum_{k=1}^{L_{0}-\kappa} n'[k+\kappa]n'^{*}[k]\right\}$$

In der Doppelsumme kommen *K* mal die Rauschwerte n'_{Lo} und n'_1^* und zwar mit Gewichtungsfaktoren $1/(L_0-1)$, $1/(L_0-2)$, ..., $1/(L_0-K)$ vor. Mit der Abkürzung

$$C[\kappa] = \sum_{i=\kappa}^{K} \frac{1}{L_0 - i}$$

lässt sich schreiben

$$\sum_{\kappa=1}^{K} \arg\left(R\left[\kappa\right]\right) \approx \sum_{\kappa=1}^{K} 2\pi\kappa\nu T + \operatorname{Im}\left\{\sum_{\kappa=1}^{K} C\left[\kappa\right]\left(n'\left[L_{0}-\kappa+1\right]+n'\left[\kappa\right]\right) + \sum_{\kappa=1}^{K} \frac{1}{L_{0}-\kappa} \sum_{k=1}^{L_{0}-\kappa} n'\left[k\right]n'^{*}\left[k-\kappa\right]\right\}\right\}$$

Wenn die Zufallsvariablen alle statistisch unabhängig voneinander sind, gilt für die Varianz des Imaginärteils:

$$\sigma_N^2\left(\sum_{\kappa=1}^K C^2[\kappa] + \frac{\sigma_N^2}{2}C^2[1]\right).$$

Für die Varianz des Frequenzschätzfehlers folgt

$$\sigma_{\hat{\nu}}^2 \approx \frac{1}{\pi^2 T^2 K^2 (K+1)^2} \sigma_N^2 \left(\sum_{\kappa=1}^K C^2 [\kappa] + \frac{\sigma_N^2}{2} C^2 [1] \right).$$

Für $K = L_0/2$ lässt sich ein Verhalten proportional zu $1/L_0^3$ etwa erahnen.

(Preisfrage: Gibt es einen geschlossenen Ausdruck für die Summe über die C^2 ? Eventuell für den Sonderfall $K = L_0/2$?)

Für K = 1 ist $C[1] = 1/(L_0-1)$ und es folgt

$$\sigma_{\tilde{v}T}^{2}(K=1) = E\left[\left(\hat{v}T - vT\right)^{2}\right] \approx \frac{1}{4\pi^{2}\left(L_{0}-1\right)^{2}}\sigma_{N}^{2}\left(1 + \frac{\sigma_{N}^{2}}{2}\right).$$

Dies ist die gleiche Formel, die auch für Phasendifferenzmittelung hergeleitet wurde (siehe (G-3)).

Anhang H: Berechnung von S-Kurven zeitdiskreter Regelschleifen zur Parameterschätzung

1 Ersatzschaltbild rückgekoppelter Anordnungen zur Parameterschätzung

Zugrunde gelegt wird ein regelungstechnisches Ersatzschaltbild nach Abb. 1-1.



Abb. 1-1: Regelungstechnisches Ersatzschaltbild einer rückgekoppelten Anordnung zur Parameterschätzung

Darin ist $S(\Delta \lambda)$ die S-Kurve, eine i.A. nicht-lineare Funktion von der Parameterdifferenz $\Delta \lambda = \lambda - \hat{\lambda}$. Sie ist definiert durch

$$S(\Delta \lambda) = \mathbf{E} \left[e[k] | \Delta \lambda \right]. \tag{H-1}$$

Der Erwartungswert ist über das Rauschen und bei Entscheidungs-gestützten Anordnungen auch über die Datensymbole zu nehmen.

2 S-Kurve für Daten- und Takt-unabhängige Frequenzschätzung

Wir beginnen mit der analytischen Beschreibung des Fehlermaßes e(t), wobei wir zunächst auf die Zeitmittelung verzichten. Erst später werden wir analysieren, welchen Effekt die Mittelung über *M* Werte bei Überabtastung hat. e(t) ist definiert durch den Differentialquotienten der Momentanleistung des Signals nach dem matched Filter bezüglich der Frequenzhypothese \tilde{v} . Da man Differentiation und Erwartungswertbildung vertauschen kann, gilt

$$\mathbf{E}\left[e\left(t\left|v-\tilde{v}\right)\right]=\mathbf{E}\left[\frac{d}{d\tilde{v}}\left|x\left(t\left|\tilde{v}\right)\right|^{2}\right]=\frac{d}{d\tilde{v}}\mathbf{E}\left[\left|x\left(t\left|\tilde{v}\right)\right|^{2}\right]\right].$$
(H-2)

Mit dem Matched-Filter-Ausgangssignal

$$x(t|\tilde{v}) = \int r(\xi) e^{-j2\pi\tilde{v}\xi} g^*(\xi - t) d\xi$$
(H-3)

und dem Empfangssignal

$$r(t) = e^{j\theta} e^{j2\pi vt} \sum_{k} a[k] g(t - kT)$$
(H-4)

folgt

$$\begin{split} \mathbf{E}\Big[e(t|v-\tilde{v})\Big] &= \frac{d}{d\tilde{v}} \mathbf{E}\Big[\int r(\xi)e^{-j2\pi\tilde{v}\xi}g^*(\xi-t)d\xi \cdot \int r^*(\xi)e^{j2\pi\tilde{v}\xi}g(\xi-t)d\xi\Big] \\ &= \frac{d}{d\tilde{v}} \mathbf{E}\begin{bmatrix}e^{j\theta}\sum_k a[k]\int e^{j2\pi(v-\tilde{v})\xi}g^*(\xi-t)g(\xi-kT)d\xi\\ \cdot e^{-j\theta}\sum_l a^*[l]\int e^{-j2\pi(v-\tilde{v})\xi}g(\xi-t)g^*(\xi-lT)d\xi\end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{d\tilde{v}}\sum_k \sum_l \mathbf{E}\Big[a[k]a^*[l]\Big]\rho_{gg}(t-kT|\Delta v)\rho_{gg}^*(t-lT|\Delta v) \quad . \quad (\mathrm{H-5}) \end{split}$$

Darin ist

$$\rho_{gg}\left(t\left|\Delta\nu\right)=\int g^{*}\left(\xi\right)e^{j2\pi\Delta\nu\xi}g\left(\xi+t\right)d\xi \tag{H-6}$$

die Zeitkorrelationsfunktion des Modulationsgrundimpulses mit seiner um Δv frequenzverschobenen Version. Bei statistisch unabhängigen und normierten Datensymbolen gilt

$$\mathbf{E}\left[a\left[k\right]a^{*}\left[l\right]\right] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = k\\ 0 & \text{für } l \neq k \end{cases}$$
(H-7)

Damit folgt

$$\mathbf{E}\left[e\left(t\left|\Delta\nu\right)\right] = \frac{d}{d\tilde{\nu}}\sum_{k}\left|\rho_{gg}\left(t-kT\left|\Delta\nu\right)\right|^{2}.$$
(H-8)

Wir betrachten nun Abtastwerte des Signals e(t) in äquidistanten Abständen von T/M und mitteln diese über eine Symboldauer, d.h. wir substituieren $t = (l+m/M)T + \tau$ und definieren

$$e\left[l\left|\Delta v\right] = \sum_{m=0}^{M-1} e\left(\left(l + \frac{m}{M}\right)T + \tau \left|\Delta v\right)\right).$$
(H-9)

Damit folgt

$$\mathbf{E}\left[e\left[l|\Delta v\right]\right] = \frac{d}{d\tilde{v}}\sum_{i}\left|\rho_{gg}\left(\tau - i\frac{T}{M}|\Delta v\right)\right|^{2}.$$
 (H-10)

Mit Hilfe der Poissonschen Summenformel kann allgemein die Summe über äquidistante Abtastwerte einer Zeitfunktion durch eine Summe über äquidistante Abtastwerte der zugehörigen Fouriertransformierten ausgedrückt werden. Die Poisson'sche Summenformel lautet in ihrer allgemeinsten Form

$$\sum_{k} h(\tau + kT) e^{-j2\pi kvT} = \frac{e^{j2\pi v\tau}}{T} \sum_{n} H\left(v + \frac{n}{T}\right) e^{j2\pi n\frac{\tau}{T}}$$
(H-11)

Darin ist H(f) die Fouriertransformierte der Zeitfunktion h(t). Um sie auf (H-10) anzuwenden setzen wir v = 0, substituieren T durch T/M und setzen $h(\tau + kT) = |\rho_{gg}(\tau - kT|\Delta v)|^2$. Damit folgt

$$\sum_{k} \left| \rho_{gg} \left(\tau - k \frac{T}{M} \left| \Delta \nu \right) \right|^{2} = \frac{1}{T} \sum_{n} e^{j2\pi n\tau \frac{M}{T}} \int S_{gg}^{*} \left(\eta \right) S_{gg} \left(\eta + n \frac{M}{T} \right) d\eta .$$
(H-12)

Unter welchen Voraussetzungen ist die Summe unabhängig vom Abtastzeitpunkt τ ? Offensichtlich dann, wenn das Integral für alle *n* mit Ausnahme für n = 0 verschwindet. Eine hinreichende Bedingung ist die Bandbegrenzung der Modulationsimpulse, d.h. $G(f) \equiv 0$ für $|f| \le M/2T$. Dann ist nämlich das Produkt des Spektrums mit jeder Verschiebung um nM/T für $n \ne 0$ immer Null.

Für RRC-Impulse ist dies bereits für M = 2 erfüllt. Es bleibt also nur der Term für n = 0 übrig, Bei Überabtastung mit $M \ge 2$ gilt für bandbegrenzte Impulse mit $G(f) \equiv 0$ für $|f| \le 1/T$

$$S(\nu - \tilde{\nu}) = \frac{1}{T^2} \frac{d}{d\tilde{\nu}} \int \left| G(f) \right|^2 \left| G(f + \nu - \tilde{\nu}) \right|^2 df \,. \tag{H-13}$$

3 S-Kurven für Phasenschaätzung mit dem Costas-Regelkreis

Das Fehlersignal ist gegeben durch

$$e[k] = \operatorname{Im}\left\{\hat{a}^{*}[k]x[k]e^{-j\tilde{\theta}[k]}\right\}.$$
 (H-14)

Bei Nyquist-Impulsen und korrektem Abtastzeitpunkt ist x[k] bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch $a[k]e^{j\theta} + n[k]$, wobei n[k] einen Abtastwert des Rauschanteils im Signal nach dem matched Filter bezeichnet. Damit lässt sich das Fehlersignal in der Form

$$e[k] = \operatorname{Im}\left\{\hat{a}^{*}[k]c[k]e^{j(\theta-\hat{\theta})}\right\} + \operatorname{Im}\left\{\hat{a}^{*}[k]n[k]e^{-j\hat{\theta}}\right\}.$$
 (H-15)

darstellen. Der Erwartungswert bezüglich der Datensymbole und des Rauschens liefert

$$S(\Delta\theta) = \operatorname{Im}\left\{ \operatorname{E}\left[\hat{a}^{*}[k]a[k]\right]e^{j(\theta-\hat{\theta})}\right\} + \operatorname{Im}\left\{\operatorname{E}\left[\hat{a}^{*}[k]n[k]\right]e^{-j\hat{\theta}}\right\}.$$
 (H-16)

Bei dem zweiten Term ist zu berücksichtigen, dass $\hat{a}[k]$ in einer komplizierten Weise von n[k] abhängt. Wenn die Rauschamplitude allerdings hinreichend klein ist, so dass n[k] die Symbolentscheidung nicht beeinflusst, kann statistische Unabhängigkeit unterstellt werden, so dass der Erwartungswert des zweiten Terms Null wird. Für hinreichend kleine Rauschamplituden folgt also

$$S(\Delta\theta) \approx \operatorname{Im}\left\{ \operatorname{E}\left[\hat{a}^{*}[k]a[k]\right]e^{j(\theta-\hat{\theta})}\right\}.$$
 (H-17)

Unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie erhält man für

M-PSK:
$$S(\Delta\theta) \approx E[|a[k]|^2] \sin(\Delta\theta \mod 2\pi/M).$$
 (H-18)

Die Modulo-Funktion muss hier $\Delta \theta$ auf das Intervall $(-\pi/M, \pi/M]$ abbilden. Gleichheit ist erfüllt unter der Annahme, dass kein Rauschen vorliegt. Die Funktion (H-18) ist periodisch

mit der Periodenlänge $2\pi/M$ (auf Grund der Modulo-Funktion). Sie hat sägezahnähnlichen Charakter. Mit zunehmender Rauschvarianz nimmt die Wahrscheinlichkeit für Fehlentscheidungen bei der Symboldetektion zu. Dies bewirkt ein Verschleifen der steilen Flanken des Sägezahns sowie eine Abrundung der Knickpunkte.

Für M-QAM existiert selbst unter Vernachlässigung des Rauschens keine kompakte Darstellung für die S-Kurve.

4 S-Kurven für Zeitschätzung nach perfekter Frequenzkorrektur

Es gilt

$$x(t) = e^{j\theta} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i] \rho_{gg} \left(t - iT - \tau \right) + w(t)$$
(H-19)

mit

$$\rho_{gg}\left(\Delta t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(t + \Delta t\right) g^{*}(t) dt \qquad (\text{H-20})$$

als AKF des Modulationsgrundimpulses. Wir setzen stets eine reellwertige AKF voraus.

Die Symbole sollen aus einem normierten Symbolalphabet stammen und aufeinander folgende Symbole seien statistisch unabhängig voneinander, so dass gilt

$$\mathbf{E}\left[a^{*}\left[k\right]a\left[i\right]\right] = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k\\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}.$$
 (H-21)

4.1 Entscheidungs-gestützter Maximum Likelihood Detektor (DD-MLD)

Fehlermaß:

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{\hat{a}^{*}[k]e^{-j\hat{\theta}}x'(kT+\hat{\tau})\right\}$$
(H-22)

(H-19) abgeleitet und eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{\hat{a}^{*}[k]\left(e^{j(\theta-\hat{\theta})}\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[k-i]\rho_{gg}'(iT-\Delta\tau)\right)\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\hat{a}^{*}[k]a[k]\rho_{gg}'(-\Delta\tau)\right\}$$

$$+ \operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\sum_{i\neq0}^{\infty}\left(\hat{a}^{*}[k]a[k-i]\rho_{gg}'(iT-\Delta\tau)\right)\right\}$$
(H-23)

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Für korrekt geschätzte Datensymbole folgt unter Nutzung der Voraussetzung (H-21)

DD-MLD
$$S(\Delta \tau) = \rho'_{gg} (-\Delta \tau) \cos(\theta - \hat{\theta}).$$
 (H-24)

Für korrekte Phasenschätzung ist die S-Kurve also gegeben durch die abgeleitete AKF des Modulationsgrundimpulses. Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist dann gegeben durch die zweite Ableitung der AKF:

Anhang H

DD-MLD
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = -\rho_{gg}''(\Delta \tau) \cos(\theta - \hat{\theta}).$$
 (H-25)

4.2 Entscheidungs-gestützter Early-Late Detektor (DD-ELD)

Fehlermaß: $e[k] = \operatorname{Re}\left\{\hat{a}^{*}[k]e^{-j\hat{\theta}}\left[x\left(kT + T/2 + \hat{\tau}[k]\right) - x\left(kT - T/2 + \hat{\tau}[k-1]\right)\right]\right\}$ (H-26)

(H-19) eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\hat{a}^{*}[k]\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[i]\left(\rho_{gg}\left((k-i+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((k-i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right]\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\hat{a}^{*}[k]a[k]\left(\rho_{gg}\left(T/2-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left(-T/2-\Delta\tau\right)\right)\right\}$$
$$+ \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\hat{\theta})}\sum_{i\neq0}\hat{a}^{*}[k]a[k-i]\left(\rho_{gg}\left((i+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right\}$$
(H-27)

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Für korrekt geschätzte Datensymbole folgt unter Nutzung der Voraussetzung (H-21)

DD-ELD:
$$S(\Delta \tau) = \left(\rho_{gg} \left(T/2 - \Delta \tau\right) - \rho_{gg} \left(-T/2 - \Delta \tau\right)\right) \cos\left(\theta - \hat{\theta}\right).$$
(H-28)

Für korrekte Phasenschätzung ist die S-Kurve also gegeben durch die Differenz der Abtastwerte der AKF des Modulationsgrundimpulses ein halbes Symbolintervall nach bzw. vor dem Maximum. Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist dann gegeben durch die Ableitung von $S(\Delta \tau)$ nach $\Delta \tau$. Berücksichtigt man, dass die differenzierte AKF eine ungerade Funktion ist, ergibt sich

DD-ELD:
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{gg} \left(-T/2\right) \cos\left(\theta - \hat{\theta}\right). \tag{H-29}$$

4.3 Entscheidungs-gestützter Zero-Crossing Detektor (DD-ZCD)

Fehlermaß: $e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left(\hat{a}^*[k-1] - \hat{a}^*[k] \right) e^{-j\hat{\theta}} x \left(kT - T / 2 + \hat{\tau}[k] \right) \right\}$ (H-30)

(H-19) eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\left(\hat{a}^{*}[k-1]-\hat{a}^{*}[k]\right)\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[i]\rho_{gg}\left((k-i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right\}$$

= $\operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\left(\hat{a}^{*}[k-1]a[k-1]-\hat{a}^{*}[k]a[k-1]\right)\rho_{gg}\left(T/2-\Delta\tau\right)\right\}$
+ $\operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\left(\hat{a}^{*}[k-1]a[k]-\hat{a}^{*}[k]a[k]\right)\rho_{gg}\left(-T/2-\Delta\tau\right)\right\}$
+ $\operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\sum_{i\notin\{0,1\}}\left(\hat{a}^{*}[k-1]-\hat{a}^{*}[k]\right)a[k-i]\rho_{gg}\left((i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right\}$

Die ersten beiden Zeilen werden noch etwas umsortiert:

$$+\operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\left(\hat{a}^{*}[k-1]a[k]\rho_{gg}\left(-T/2-\Delta\tau\right)-\hat{a}^{*}[k]a[k-1]\rho_{gg}\left(T/2-\Delta\tau\right)\right)\right\}$$
$$+\operatorname{Re}\left\{e^{j(\theta-\hat{\theta})}\sum_{i\notin\{0,1\}}\left(\hat{a}^{*}[k-1]-\hat{a}^{*}[k]\right)a[k-i]\rho_{gg}\left((i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right\}$$

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Für korrekt geschätzte Datensymbole folgt unter Nutzung der Voraussetzung (H-21)

DD-ZCD:
$$S(\Delta \tau) = (\rho_{gg}(T/2 - \Delta \tau) - \rho_{gg}(-T/2 - \Delta \tau))\cos(\theta - \hat{\theta}).$$
 (H-31)

Für korrekte Phasenschätzung ist die S-Kurve also gegeben durch die Differenz der Abtastwerte der AKF des Modulationsgrundimpulses nach und vor dem Maximum. Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist dann gegeben durch die Ableitung von $S(\Delta \tau)$ nach $\Delta \tau$. Unter Berücksichtigung der Punktsymmetrie der differenzierten AKF ergibt sich

DD-ZCD:
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{gg}(-T/2)\cos(\theta - \hat{\theta}). \tag{H-32}$$

Der DD-ZCD hat dieselbe S-Kurve wie der DD-ELD.

4.4 Entscheidungs-gestützter Müller & Müller Detektor (DD-MMD)

Fehlermaß: $e[k] = \operatorname{Re}\left\{ \left(\hat{a}^*[k-1]x(kT + \hat{\tau}[k]) - \hat{a}^*[k]x(kT - T + \hat{\tau}[k-1]) \right) e^{-j\hat{\theta}} \right\}$ (H-33)

(H-19) eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\theta)}\left(\hat{a}^{*}[k-1]\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[i]\rho_{gg}\left((k-i)T-\Delta\tau\right)-\hat{a}^{*}[k]\sum_{i=-\infty}^{\infty}a[i]\rho_{gg}\left((k-i-1)T-\Delta\tau\right)\right)\right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\theta)}\hat{a}^{*}[k-1]a[k-1]\rho_{gg}\left(T-\Delta\tau\right)\right\}$$

$$-\operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\theta)}\hat{a}^{*}[k]a[k]\rho_{gg}\left(-T-\Delta\tau\right)\right\}$$

$$+\operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\theta)}\left(\hat{a}^{*}[k-1]a[k]-\hat{a}^{*}[k]a[k-1]\right)\rho_{gg}\left(-\Delta\tau\right)\right\}$$

$$+\operatorname{Re}\left\{e^{i(\theta-\theta)}\left(\sum_{i\neq\{0,1\}}\hat{a}\left(\hat{c}^{*}[k-1]a[k-i]-\hat{a}^{*}[k]a[k-i+1]\right)\rho_{gg}\left(iT-\Delta\tau\right)\right)\right\}$$

$$(H-34)$$

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Für korrekt geschätzte Datensymbole folgt unter Nutzung der Voraussetzung (H-21)

DD-MMD:
$$S(\Delta \tau) = (\rho_{gg}(T - \Delta \tau) - \rho_{gg}(-T - \Delta \tau))\cos(\theta - \hat{\theta}).$$
 (H-35)

Für korrekte Phasenschätzung ist die S-Kurve also gegeben durch die Differenz der Abtastwerte der AKF des Modulationsgrundimpulses ein Symbolintervall nach bzw. vor dem Maximum. Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist dann gegeben durch die Ableitung von $S(\Delta \tau)$ nach $\Delta \tau$. Unter Berücksichtigung der Punktsymmetrie der differenzierten AKF ergibt sich

DD-MMD:
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{gg}(-T)\cos(\theta - \hat{\theta}).$$
(H-36)

4.5 Daten-unabhängiger Maximum Likelihood Detektor (NDA-MLD)

Fehlermaß: $e[k] = \operatorname{Re}\left\{x^{*}\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)x'\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)\right\}$ (H-37)

(H-19) abgeleitet und eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a^{*}[k-i]\rho_{gg}\left(iT - \Delta\tau\right)\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a[k-i]\rho_{gg}'\left(iT - \Delta\tau\right)\right)\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{*}[k-i]a[k-l]\rho_{gg}\left(iT - \Delta\tau\right)\rho_{gg}'\left(lT - \Delta\tau\right)\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|a[k-i]\right|^{2}\rho_{gg}\left(iT - \Delta\tau\right)\rho_{gg}'\left(iT - \Delta\tau\right)\right\}$$
$$+ \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l\neq i}a^{*}[k-i]a[k-l]\rho_{gg}\left(iT - \Delta\tau\right)\rho_{gg}'\left(lT - \Delta\tau\right)\right\}$$

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Unter Nutzung der Voraussetzung (H-21) folgt

NDA-MLD
$$S(\Delta \tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho_{gg} (iT - \Delta \tau) \rho'_{gg} (iT - \Delta \tau).$$
 (H-39)

Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist gegeben durch

NDA-MLD
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = -\rho_{gg}''(0) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\rho_{gg}'(iT)|^2$$
. (H-40)

4.6 Daten-unabhängiger Early-Late Detektor (NDA-ELD)

Fehlermaß: $e[k] \approx \operatorname{Re}\left\{x^*\left(kT + \hat{\tau}[k]\right)\left(x\left(kT + T/2 + \hat{\tau}[k]\right) - x\left(kT - T/2 + \hat{\tau}[k]\right)\right)\right\}$ (H-41) (H-19) eingesetzt ergibt

$$e[k] = \operatorname{Re}\left\{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a^{*}[i]\rho_{gg}\left((k-i)T-\Delta\tau\right)\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a[i]\left(\rho_{gg}\left((k-i+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((k-i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right)\right\}\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{*}[i]a[l]\rho_{gg}\left((k-i)T-\Delta\tau\right)\left(\rho_{gg}\left((k-l+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((k-l-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right\}\right\}$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left|a[k-i]\right|^{2}\rho_{gg}\left(iT-\Delta\tau\right)\left(\rho_{gg}\left((i+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((i-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right\}\right\}$$
$$+ \operatorname{Re}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{l\neq i}a^{*}[k-i]a[k-l]\rho_{gg}\left(iT-\Delta\tau\right)\left(\rho_{gg}\left((l+0.5)T-\Delta\tau\right)-\rho_{gg}\left((l-0.5)T-\Delta\tau\right)\right)\right\}\right\}$$

Die S-Kurve ist der Erwartungswert über e[k]. Unter Nutzung der Voraussetzung (H-21) folgt

NDA-ELD:
$$S(\Delta \tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho_{gg} (iT - \Delta \tau) (\rho_{gg} ((i+0.5)T - \Delta \tau) - \rho_{gg} ((i-0.5)T - \Delta \tau)).$$
 (H-42)

Die Steigung bei $\Delta \tau = 0$ ist gegeben durch

NDA-ELD:
$$K_{\rm D} = S'(\Delta \tau = 0) = 2\rho'_{gg}(-T/2) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho'_{gg}(iT)(\rho_{gg}((i+0.5)T) - \rho_{gg}((i-0.5)T)).$$
(H-43)